

DIE GEOMETRIE DER LAGE.



DIE
GEOMETRIE DER LAGE.

VORTRÄGE

VON

D^{R.} THEODOR REYE,

PROFESSOR AM EIDGENÖSSISCHEN POLYTECHNICUM ZU ZÜRICH.

ZWEITE ABTHEILUNG.

MIT EINER AUFGABEN-SAMMLUNG UND EINER LITH. FIGUREN-TAFEL.

HANNOVER.

C A R L R Ü M P L E R.

1868.

GEOMETRIE DER LAGE

FORTSETZUNG

Dr. THEODOR REYE

BRUNNEN VERLAG

Druck von August Grimpe in Hannover.

Vorwort zur zweiten Abtheilung.

Das Erscheinen dieses letzten, umfangreicheren Theiles meines Buches ist zu meinem Bedauern verzögert worden theils durch den neuen Stoff, der während der Ausarbeitung sich mir aufdrängte, theils durch erhöhte Anforderungen an meine Lehrthätigkeit während der letzten drei Semester. Leider ist mir von jetzt an versagt, in gleicher Weise wie bisher als Lehrer mitzuwirken an der Verbreitung meiner Lieblingswissenschaft; denn mein Colleg über die Geometrie der Lage ist mir kürzlich rücksichtslos entzogen worden, um es dem neuberufenen Professor für darstellende Geometrie auf dessen Verlangen zu übertragen. Vor mehr als vier Jahren habe ich selbst als Privatdocent dieses Colleg hier geschaffen, bevor noch an irgend einer technischen Anstalt oder Universität, ausser in Erlangen, diese Richtung der synthetischen Geometrie gelehrt wurde, und seitdem habe ich mich unablässig bemüht, es weiter auszubilden; um so empfindlicher traf mich sein unerwarteter Verlust. Ich hoffe jedoch, wenigstens durch meine gedruckten Vorträge die Kenntniss dieser schönen und nützlichen Wissenschaft fördern zu helfen, und durch sie einem grösseren Kreise den Genuss zugänglicher zu machen, den auch ich in mehrjähriger Arbeit aus dieser reichen Quelle geschöpft habe.

+ v. Staudt

Der Lehrgang dieses zweiten Theiles wurde durch ähnliche Erwägungen vorgezeichnet, wie derjenige des ersten. Zunächst werden die einfachsten Beziehungen zwischen Grundgebilden zweiter und dritter Stufe aufgestellt, und sodann der Reihe nach die neuen räumlichen Gebilde untersucht, welche von jenen Grundgebilden erzeugt werden. Unter diesen Erzeugnissen befinden sich gewisse Strahlengebilde, welche bisher von den Geometern wenig oder gar

nicht beachtet worden sind. Das Studium derselben schien mir von Nutzen zu sein für die weitere Ausbildung der Geometrie der Lage, und führte zu mehreren nicht uninteressanten Reihen neuer Sätze.

Wie bei von Staudt bildet die Lehre von der Collineation und der Reciprocität die Grundlage für alles Folgende, zunächst für die Theorie der Flächen zweiter Ordnung. Doch definire ich diese Flächen nicht, wie von Staudt ¹⁾, als Ordnungsflächen räumlicher Polarsysteme, sondern mit Seydewitz ²⁾ unmittelbar als Erzeugnisse reciproker Strahlenbündel, weil sie so dem Vorstellungsvermögen leichter zugänglich werden. Freilich sah ich mich dabei genöthigt, für manche Eigenschaften jener Flächen neue Beweise aufzusuchen. Die Lehre von der Affinität und Aehnlichkeit glaubte ich weiter ausführen zu müssen, als in den mir bekannten Werken über synthetische Geometrie geschehen ist. Manche von den schönen Sätzen, mit welchen uns der Schöpfer dieser Lehre, Herr Moebius, in seinem barycentrischen Calcul bereichert hat, dürften wohl hier zuerst ohne Rechnung bewiesen sein. Die ebenen und räumlichen Polarsysteme werden auch dem Anfänger keine grossen Schwierigkeiten mehr bieten, da sie ihm schon durch die Polarität der Curven und Flächen zweiter Ordnung bekannt werden. Im Nullsysteme bilden nach Herrn Plücker's Bezeichnung ³⁾ die sämtlichen Leitstrahlen einen „linearen Strahlencomplex.“

Die letzten dreizehn Vorträge und die zweite Hälfte der Aufgaben und Lehrsätze betreffen fast ausschliesslich Gegenstände, die erst seit etwa zehn Jahren von den Geometern eingehend untersucht werden. Die Eigenthumsrechte jedes einzelnen Autors dürften hier noch nicht so allgemein bekannt sein, wie bei den vorhergehenden Vorträgen. Ich halte es desshalb für meine Pflicht, überall die einschlagende Literatur sorgfältig anzugeben, soweit sie mir zugänglich war, um so mehr, da ich unmöglich bei den einzelnen Sätzen jedesmal den Entdecker angeben kann. Aus den literarischen Erscheinungen der letzten Monate habe ich übrigens nur für die Aufgabensammlung hie und da Nutzen ziehen können,

¹⁾ von Staudt, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, pag. 196.

²⁾ Seydewitz in Grunert's Archiv für Math. u. Phys. Bd. 9, pag. 158.

³⁾ Plücker in den Philosophical Transactions, 1865.

da das gesammte übrige Manuscript schon im Mai in den Händen meines Herrn Verlegers sich befand.

Von den Raumcurven dritter Ordnung sind mehrere Eigenschaften schon lange bekannt. So beweist Herr Moebius schon 1827 im barycentrischen Calcul (pag. 120), dass die Tangentenfläche dieser Curve von ihren Schmiegungs-Ebenen in Curven zweiter Ordnung geschnitten wird; Herr Chasles¹⁾ stellt bereits 1837 den Satz auf, dass diese Fläche von der vierten Ordnung sei; Herr Cayley²⁾ zeigt 1845, dass durch jeden Punkt des Raumes eine Secante der Curve hindurchgeht. Zwei Jahre später beweist Seydewitz³⁾, dass diese Raumcurve von zwei collinearen Strahlenbündeln erzeugt wird, und entdeckt zugleich viele ihrer Eigenschaften. — Von späteren Autoren wird die Curve gewöhnlich als partieller Schnitt geradliniger Flächen zweiter Ordnung definirt; ich habe jedoch die Seydewitz'sche Erzeugungsart vorgezogen, weil sie uns sofort alle eigentlichen und uneigentlichen Secanten der Raumcurve liefert. Auch ergeben sich mit ihrer Hülfe äusserst einfach alle von Herrn Chasles⁴⁾ ohne Beweis aufgestellten Sätze, welche die Herren Schröter⁵⁾, Cremona⁶⁾ und v. Staudt⁷⁾ seither bewiesen haben, und die in meinen zehnten und eilften Vortrag eingeflochten sind. Die Theorie der conjugirten Punkte und Ebenen in Bezug auf die Raumcurve dritter Ordnung ist den Herren Cremona⁸⁾ und von Staudt⁹⁾ zu danken; ich hatte hier einige Schwierigkeiten zu überwinden in Betreff der uneigentlichen Secanten.

Neu ist, wie ich glaube, der Inhalt des dreizehnten Vortrages bis auf einzelne, in anderer Art schon bewiesene Sätze über die

1) Chasles, Aperçu historique, Note 33.

2) Cayley in Liouville, Journal de Math., T. 10.

3) Seydewitz in Grunert's Archiv f. Math. u. Phys., Bd. 10 pag. 203.

4) Chasles in den Comptes rendus 1857 oder in Liouv. Journ. de Math., 1857, pag. 397.

5) Schröter im Journal f. d. reine u. angewandte Math., Bd. 56 pag. 27.

6) Cremona, ebenda Bd. 58 pag. 138 und Bd. 60 pag. 188.

7) von Staudt, Beiträge zur Geom. d. Lage, Nürnberg 1860, pag. 298.

8) Cremona in den Annali di Matematica T. I und II (Roma 1858 und 1859), und in den Nouv. Annales de Math. 2^e série, T. 1, 1861.

9) von Staudt, Beitr. z. Geom. d. Lage, 1860, pag. 321.

Raumcurve dritter Ordnung. Die geometrischen Verwandtschaften zweiten Grades habe ich in grösserer Ausführlichkeit und mit anderer Begründung schon in der Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. XI bearbeitet. — Die in einander liegenden collinearen Systeme hätten auch vor den Raumcurven dritter Ordnung erledigt werden können; jedenfalls aber wird die Anzahl ihrer entsprechend gemeinschaftlichen Elemente am Leichtesten mittelst jener Raumcurven gefunden. Die Sätze über involutorische Systeme verdanken wir von Staudt ¹⁾; über das „Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe“, welches bei dem geschaart-involutorischen Systeme vorkommt, und welches auch Herr Hermes ²⁾ kürzlich, und zwar analytisch untersucht hat, gebe ich in der Aufgabensammlung mehrere neue Sätze.

Als mein Eigenthum glaube ich auch den grössten Theil der Vorträge 15 bis 20 ansprechen zu dürfen, vor Allem die Lehre von den Strahlencomplexen, welche durch collineare räumliche Systeme erzeugt werden. Diese Strahlencomplexe können wir mit Herrn Plücker (a. a. O. pag. 779) „Complexe zweiten Grades“ nennen. Von grossem Nutzen zeigte sich bei dem Studium derselben die vorher erledigte Untersuchung der Secanten- und Axensysteme von Raumcurven dritter Ordnung; wie denn überhaupt der Ausspruch von Staudt's sich immer wieder bestätigt, dass diese Curven für die Geometrie des Raumes eine ähnliche Bedeutung haben, wie die Kegelschnitte für diejenige der Ebene. Jene Strahlencomplexe liefern mir von den Flächenbüscheln zweiter Ordnung, welche bisher der synthetischen Geometrie schwer zugänglich waren, die Haupt-Eigenschaften, namentlich auch deren projectivische Beziehungen. Ferner stellt sich heraus, dass die Axen der Kegelschnitte, die auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, einen solchen Strahlencomplex bilden, und wir erhalten dadurch vollständigen Aufschluss über die hier zuerst untersuchte Vertheilung dieser Axen im Raume. Daran schliesst sich die Lehre von den homothetischen und den confocalen Flächen zweiter Ordnung, und namentlich ergeben sich über die Normalen dieser Flächen und ihre Fusspunkte viele neue Sätze. Für con-

¹⁾ von Staudt, Geom. d. Lage (1847), pag. 129 und Beitr. z. G. d. L. (1856), pag. 63.

²⁾ Hermes im Journal f. d. r. u. angew. Math. Bd. 67 pag. 153 (1867).

focale Flächen habe ich einen Theil dieser Sätze schon in meinem „Beitrag zu der Lehre von den Trägheitsmomenten“ ¹⁾ veröffentlicht; mehrere derselben sind schon früher von Steiner ²⁾, Joachimsthal ³⁾ und Herrn Clebsch ⁴⁾ bewiesen worden.

Die letzten drei Vorträge handeln von den Flächen dritter Ordnung, welche schon vorher (pag. 92 und 145) wiederholt sich uns aufdrängten. Da gerade jetzt die Geometer sich lebhaft mit diesen Flächen beschäftigen, so dürfte das folgende Verzeichniss der sie betreffenden Literatur von allgemeinem Interesse sein:

Cayley im Cambridge and Dublin Mathem. Journal, vol. IV pag. 118.

Salmon, ebenda vol. IV p. 252 und Philos. Transactions 1860 pag. 229.

Sylvester, ebenda vol. VI p. 198 und Comptes rendus 1861 I p. 977.

Brioschi in Tortolini, Annali di Matematica, 1855.

Hesse im Journal f. d. r. u. a. Math. Bd. 49 pag. 279.

Grassmann, ebenda Bd. 49 pag. 59.

Steiner, ebenda Bd. 53 pag. 133.

Schläfli im Quarterly Journal of Math., vol. II pag. 56—65 und 110—120.

August, Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis (diss. inaug. Berolini 1862).

Clebsch im Journal f. d. r. u. a. Math., 1861 bis 1866, Bd. 58, 59, 63, 65.

Schröter, ebenda Bd. 62 pag. 265.

Salmon, Geometry of three dimensions; deutsch von Fiedler Bd. II pag. 412.

Schläfli in den Philos. Transactions 1863, pag. 193.

Sturm, Synthet. Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, Leipzig 1867.

In den meisten dieser Abhandlungen werden die Beweise durch Rechnung geführt; nur die Herren Schröter und Sturm benutzen

¹⁾ Zeitschrift für Math. u. Phys. Bd. X pag. 453.

²⁾ Steiner im Journal f. d. r. u. a. Math. Bd. 49 pag. 346.

³⁾ Joachimsthal, ebenda Bd. 59 pag. 111.

⁴⁾ Clebsch, ebenda Bd. 62 pag. 64.

fast ausschliesslich die Hilfsmittel der synthetischen Geometrie, indem sie der analytischen nur einzelne Sätze entlehnen. Die inhaltsreiche Abhandlung Steiner's giebt bekanntlich viele Hauptsätze über die Flächen dritter Ordnung und ihre 27 Geraden, jedoch ohne Beweis. Das Sturm'sche Werk konnte ich bei der Ausarbeitung meiner Vorträge nicht mehr zu Rathe ziehen, da es erst seit zwei Wochen in meinen Händen ist.

Nachdem schon früher (pag. 145) die zweite Steiner'sche Erzeugungsart der Fläche kurz besprochen wurde, gehe ich im 21sten Vortrage aus von der Erzeugungsart Grassmann's, von welcher die vierte Steiner'sche ein besonderer Fall ist, d. h. ich betrachte wie Herr Schröter die Fläche dritter Ordnung als Erzeugniss von drei collinearen Strahlenbündeln. Ohne Weiteres gelange ich so zu der bekannten Abbildung der Fläche auf einer Ebene, welche namentlich Herr Clebsch (a. a. O. Bd. 65) eingehend discutirt hat, sowie zu zwei, der Fläche angehörenden Systemen von Raumcurven dritter Ordnung. Eine sofort sich ergebende, höchst einfache Construction der Fläche aus zwei dieser Raumcurven scheint bisher unbemerkt geblieben zu sein. Ich beweise u. A. auch, dass jeder beliebige Punkt der Fläche zum Mittelpunkte von einem der drei erzeugenden Strahlenbündel gewählt werden kann, und dass seine erste Polare hinsichtlich der Fläche eine Fläche zweiter Ordnung sein muss.

Dem Nachweise der 27 auf der Fläche liegenden Geraden musste eine Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung nothwendig vorangeschickt werden, wenn ich nicht mit Herrn Schröter und Sturm aus der analytischen Geometrie die folgenden Hauptsätze als bekannt voraussetzen wollte: „Durch neun beliebige Punkte der Ebene lässt sich im Allgemeinen nur eine Curve dritter Ordnung legen; und zwei Curven dritter Ordnung schneiden einander in höchstens neun Punkten.“ Synthetisch sind meines Wissens diese Sätze noch nirgends bewiesen, wenngleich auch Herr Chasles¹⁾ sie seiner Abhandlung über jene Curven zu Grunde legt. Nach vieler vergeblicher Mühe ist mir dieser Beweis endlich gelungen; auf ihn hauptsächlich gründet sich die Theorie und Construction jener Curven.

¹⁾ Chasles in den Comptes rendus, T. 41, pag. 1190 (1855).

Die Lehre von den 27 Geraden unserer Fläche ergibt sich dann leicht aus ihrer Abbildung; ich habe neben den Steiner'schen Sätzen auch diejenigen über Herrn Schläfli's Doppelsechse entwickelt. Ueberhaupt ist fast Alles, was Steiner von der Fläche dritter Ordnung ausgesagt hat, im letzten Vortrage bewiesen worden, mit Ausnahme der Sätze aus der Polarentheorie. Auf die Untersuchungen des Herrn Schläfli über die Realität der 27 Geraden bin ich nicht eingetreten; ebenso habe ich mich hinsichtlich der Knotenpunkte, die in besonderen Fällen auftreten können, auf Andeutungen beschränkt.

Zur Uebung für Studirende habe ich dem Buche 230 Aufgaben und Lehrsätze beigelegt, jedoch nur solche, deren Auflösung oder Beweis sich ohne grosse Schwierigkeit aus den vorgetragenen Lehren ergibt. Jedem Anfänger rathe ich dringend, die Constructions-Aufgaben wirklich auszuführen, weil das Verständniss der Geometrie der Lage durch das Zeichnen wesentlich erleichtert wird. Die Sammlung enthält viele nützliche Theoreme, welche zum Theil metrische Relationen betreffen. In die zweite Hälfte habe ich vorzugsweise solche Sätze aufgenommen, die mir als Ausgangspunkte neuer Theorien geeignet schienen, den Anfänger zu selbständiger Forschung anzuregen. Man findet hier u. A. die Sätze über die Kreisschnitte der Flächen zweiter Ordnung, über die Focalstrahlen von Kegelflächen zweiter Ordnung, über das Princip der reciproken Radien, und namentlich diejenigen über den Flächenbündel und das Flächengebüsch zweiter Ordnung.

Diese Flächengebilde zweiter Ordnung habe ich in die Aufgabensammlung verwiesen, weil ich mir hier eine kürzere Beweisführung gestatten und mich häufig auf Andeutungen des Beweises beschränken durfte. Die von mir benutzte Beziehung zwischen dem Flächengebüsch und einem räumlichen Systeme hat bereits Herr Berner ¹⁾ aufgestellt; sie lässt sich auch bei Flächengebüschen *n*ter Ordnung unmittelbar anwenden, und dürfte sich auch bei diesen als fruchtbar erweisen. In sehr einfacher Weise führt sie mich auf die Steiner'sche Fläche vierter Ordnung und dritter Classe, welche vor vier Jahren zuerst von den Herren

¹⁾ Berner, de transformatione secundi ordinis cet. Diss. inauguralis. Berolini 1865.

Kummer, Weierstrass, Schröter ¹⁾, Cremona ²⁾ und Cayley ³⁾ untersucht wurde. Die Abbildung dieser Fläche auf einer Ebene, welche kürzlich von den Herren Clebsch ⁴⁾ und Cremona ⁵⁾ aus schon bekannten Gleichungen oder Eigenschaften der Fläche abgeleitet wurde, ergiebt sich mir unmittelbar, und auf sie gründe ich die Theorie der Steiner'schen Fläche. Ebenso direct gelange ich zu der windschiefen Fläche dritter Ordnung und zu mehreren Flächen vierter Ordnung, welche Schaaren von Kegelschnitten enthalten und von Herrn Kummer (a. a. O.) zuerst erörtert worden sind.

Und so wünsche ich denn dem zweiten Theile meines Buches dieselbe günstige Aufnahme, welche der erste Theil gefunden hat. Mögen meine Vorträge mit dazu beitragen, dass der synthetischen Geometrie immer neue Freunde gewonnen werden, und dass das Interesse für diese bedeutende Schöpfung unseres Jahrhunderts immer weitere Kreise durchdringe.

Zürich, den 5. October 1867.

Der Verfasser.

¹⁾ Kummer, Weierstrass und Schröter in den Berliner Monatsberichten 1863 oder im Journal f. d. r. u. a. Math. Bd. 64 pag. 66, 70.

²⁾ Cremona im Journal f. d. r. u. a. Math. Bd. 63 pag. 315.

³⁾ Cayley, ebenda Bd. 64 pag. 172.

⁴⁾ Clebsch, ebenda Bd. 67 pag. 1 (1867).

⁵⁾ Cremona in den Rendiconti del R. Istituto Lombardo vol. IV (1867).

Inhalts-Verzeichniss.

	Seite
X Erster Vortrag: Collineare und reciproke Verwandtschaft von Grundgebilden der zweiten Stufe	1
Zweiter Vortrag: Curven, welche in collinearen oder reciproken ebenen Systemen einander entsprechen	8
Dritter Vortrag: Perspectivische Lage collinearer Grundgebilde der zweiten Stufe	12
Vierter Vortrag: Collineare und reciproke Verwandtschaft räumlicher Systeme	18
Fünfter Vortrag: Flächen zweiter Ordnung, deren Erzeugung und Classification	26
X Sechster Vortrag: Polarität der Flächen zweiter Ordnung. Durchmesser, Mittelpunkt und Hauptaxen derselben	33
X Siebenter Vortrag: Affinität, Aehnlichkeit und Congruenz ebener Systeme und der Curven zweiter Ordnung	43
X Achter Vortrag: Affinität, Aehnlichkeit, Congruenz und Symmetrie räumlicher Systeme und der Flächen zweiter Ordnung	51
Neunter Vortrag: Reciproke Systeme, welche in einander liegen. Polarsysteme in der Ebene und im Raume. Nullsysteme	57
Zehnter Vortrag: Erzeugnisse von zwei collinearen Strahlenbündeln oder ebenen Systemen. Raumcurven und Ebenenbüschel dritter Ordnung	68
Elfte Vortrag: Projectivische Beziehungen und Polarität der Raumcurven und Ebenenbüschel dritter Ordnung	79
Zwölfter Vortrag: Conjugirte Punkte bezüglich einer Raumcurve dritter Ordnung	88
Dreizehnter Vortrag: Projectivische Verwandtschaft zwischen einem ebenen System und dem Secantensystem einer Raumcurve dritter Ordnung. Geometrische Verwandtschaften zweiten Grades	95
Vierzehnter Vortrag: Collineare Systeme, welche in einander liegen. Involutorische Systeme in der Ebene und im Raume	106
Fünfzehnter Vortrag: Strahlencomplexe, welche von collinearen räumlichen Systemen erzeugt werden	116
Sechzehnter Vortrag: Flächenbüschel zweiter Ordnung. Raumcurven und Ebenenbüschel vierter Ordnung	125

	Seite
Siebenzehnter Vortrag: Projectivische Beziehungen der Flächenbüschel zweiter Ordnung und der Kegelschnittbüschel	135
Achtzehnter Vortrag: Axen der Kegelschnitte, die auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen. Normalen der Fläche zweiter Ordnung . .	146
Neunzehnter Vortrag: Aehnliche, concentrisch und ähnlich liegende Flächen zweiter Ordnung und deren Normalen	155
XZwanzigster Vortrag: Fusspunkte der Axen einer Fläche zweiter Ordnung. Focalpunkte. Confocale Flächen zweiter Ordnung	161
Einundzwanzigster Vortrag: Flächen dritter Ordnung; ihre Abbildung auf einer Ebene und die in ihnen liegenden zwei Systeme von Raumcurven dritter Ordnung	172
Zweiundzwanzigster Vortrag: Ebene Curven dritter Ordnung	185
Dreiundzwanzigster Vortrag: Die 27 Geraden der Fläche dritter Ordnung und die auf der Fläche enthaltenen Kegelschnitte	196
Constructions-Aufgaben und Lehrsätze zur ersten Abtheilung	210
Harmonische Gebilde; projectivische Verwandtschaft einförmiger Grundgebilde 210—214. Pol und Polare; Durchmesser der Curven zweiter Ordnung 214—217. Regelschaaren und Regelflächen 217—218. Projectivische und involutorische Elementargebilde 218—221. Brennpunkte der Curven zweiter Ordnung 221—223.	
Aufgaben und Lehrsätze zur zweiten Abtheilung	224
Collineare und reciproke Verwandtschaft 224—227. Flächen zweiter Ordnung 227—234. Raumcurven dritter Ordnung und geometrische Verwandtschaften zweiten Grades 235—241. Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe 241—244. Flächenbündel zweiter Ordnung und Flächen dritter Ordnung 244—246. Flächengebüsch zweiter Ordnung und Flächen vierter Ordnung 246—256. Besondere Fälle des Flächengebüsches zweiter Ordnung 256—268.	

Berichtigungen zur ersten Abtheilung.

- pag. 33 Z. 19 v. u. statt „ihr“ l. „ihnen“.
„ 43 Z. 15 u. 19 v. o. statt „perspectivische“ l. „projectivische“.
„ 104 Z. 6 v. u. statt „drei“ l. „zwei“.
„ 105 Z. 18 v. u. statt „gemein“ l. „entsprechend gemein“.
„ 137 Z. 3 v. o. statt „ $(A A_1 B_1 C_1)$ “ l. „ $A (A_1 B_1 C_1)$ “.
Fig. 37 fehlen die Geraden $M N X$ und $K N Z$.
-

Berichtigungen zur zweiten Abtheilung.

- pag. 7 Z. 17 v. o. statt „Endpunkten“ l. „Eckpunkten“.
„ 13 Z. 19 v. u. rechts statt „Vierecks“ l. „Vierkants“.
„ 14 Z. 3 v. u. statt „ $(\delta_1, \varepsilon_1, \dots)$ “ l. „ $(\delta, \varepsilon, \dots)$ “.
„ 20 Z. 8 v. o. statt „weil α_1 “ l. „(weil α_1 “.
„ 42 Z. 12 u. 13 v. u. statt „ δ “ l. „ ε “.
„ 56 Z. 14 v. o. statt „58“ l. „52“.
„ 72 Z. 1 v. u. statt „collineare“ l. „projectivische“.
„ 80 Z. 5 v. u. statt „verbinden“ l. „verbindet“.
„ 82 Z. 19 v. u. statt „Ebene σ “ l. „Ebenen σ “.
„ 111 Z. 19 v. u. statt „zugeordnete Ebene“ l. „zugeordneten Ebenen“.
„ 155 Z. 18 v. u. statt „das Axensystem“ l. „der Axencomplex“.
„ 186 Z. 14 v. u. statt „iu“ l. „in“.
-

Beobachtungen zur ersten Abtheilung.

Am 22. 10. 1871. 1. Beobachtung.
Am 23. 10. 1871. 2. Beobachtung.
Am 24. 10. 1871. 3. Beobachtung.
Am 25. 10. 1871. 4. Beobachtung.
Am 26. 10. 1871. 5. Beobachtung.
Am 27. 10. 1871. 6. Beobachtung.

Beobachtungen zur zweiten Abtheilung.

Am 28. 10. 1871. 7. Beobachtung.
Am 29. 10. 1871. 8. Beobachtung.
Am 30. 10. 1871. 9. Beobachtung.
Am 31. 10. 1871. 10. Beobachtung.
Am 1. 11. 1871. 11. Beobachtung.
Am 2. 11. 1871. 12. Beobachtung.
Am 3. 11. 1871. 13. Beobachtung.
Am 4. 11. 1871. 14. Beobachtung.
Am 5. 11. 1871. 15. Beobachtung.
Am 6. 11. 1871. 16. Beobachtung.
Am 7. 11. 1871. 17. Beobachtung.
Am 8. 11. 1871. 18. Beobachtung.
Am 9. 11. 1871. 19. Beobachtung.
Am 10. 11. 1871. 20. Beobachtung.

Erster Vortrag.

Collineare und reciproke Verwandtschaft von Grundgebilden der zweiten Stufe.

In analoger Weise, wie die einförmigen Grundgebilde auf einander bezogen wurden, können wir auch ebene Systeme und Strahlenbündel auf einander beziehen. Namentlich können wir unsere Betrachtungen über die perspectivische Lage einförmiger Grundgebilde hier bei den Grundgebilden der zweiten Stufe wiederholen. Analog dem Früheren nennen wir deshalb perspectivisch auf einander bezogen:

- 1) ein ebenes System und einen Strahlenbündel, wenn das erstere ein Schnitt des letzteren und umgekehrt dieser ein Schein von jenem ist;
- 2) zwei ebene Systeme, wenn sie Schnitte eines und desselben Strahlenbündels sind;
- 3) zwei Strahlenbündel, wenn sie Scheine eines und desselben ebenen Systemes sind.

Def.

Der Schein, den eine ebene Landschaft in Ihr Auge wirft, heisst hiernach ein zu der Landschaft perspectivischer Strahlenbündel. Denken Sie sich diesen Schein durch eine neue Ebene aufgefangen oder geschnitten, so erhalten Sie ein perspectivisches Bild der Landschaft, oder ein zweites ebenes System, welches zu demjenigen der Landschaft perspectivische Lage hat. Nach zwei verschiedenen Punkten endlich wirft die Landschaft zwei Scheine, welche offenbar zwei perspectivische Strahlenbündel sind.

Wenn wir nun in einer Reihe von Grundgebilden der zweiten Stufe jedes auf das folgende perspectivisch beziehen, so wird, ähnlich wie bei den einförmigen Grundgebilden, auch das erste auf das letzte bezogen sein, indem jedem Elemente des einen ein bestimmtes Element des andern entspricht; aber sie werden im All-

gemeinen nicht perspectivisch liegen. Werden ferner zwei Grundgebilde zweiter Stufe, z. B. zwei ebene Systeme, perspectivisch auf einander bezogen, und wird hernach das eine verschoben gegen das andere, so bleiben sie aufeinander bezogen, verlieren jedoch ihre perspectivische Lage. Allein sie stehen immerhin noch in einer eigenthümlichen Beziehung zu einander, welche Möbius mit dem Namen der collinearen Verwandtschaft belegt hat. Nämlich in zwei so auf einander bezogenen ebenen Systemen z. B. entspricht jedem geraden Gebilde wieder ein gerades Gebilde, jedem Strahlenbüschel ein Strahlenbüschel, jeder Curve mit ihren Tangenten wieder eine Curve mit ihren Tangenten, jedem n Eck ein n Eck u. s. w. Wir nennen hiernach collinear verwandt, oder kürzer collinear:

- 1) zwei ebene Systeme Σ und Σ_1 , wenn jedem Punkte P von Σ ein Punkt P_1 von Σ_1 entspricht, und jeder durch P gehenden Geraden g von Σ eine durch P_1 gehende Gerade g_1 von Σ_1 ;
- 2) ein ebenes System Σ und einen Strahlenbüschel S_1 , wenn jedem Punkt P von Σ ein Strahl p_1 von S_1 entspricht, und jeder durch P gehenden Geraden g von Σ eine durch p_1 gehende Ebene γ_1 von S_1 ;
- 3) zwei Strahlenbüschel S und S_1 , wenn jedem Strahle p von S ein Strahl p_1 von S_1 entspricht, und jeder durch p gehenden Ebene γ von S eine durch p_1 gehende Ebene γ_1 von S_1 .

Kürzer, und dann auch auf räumliche Systeme anwendbar, können wir mit Herrn v. Staudt diese Erklärung offenbar so aussprechen:

Zwei Grundgebilde der zweiten Stufe oder auch zwei räumliche Systeme heissen collinear, wenn je zwei ungleichartigen Elementen P und g des einen, von welchen P in g liegt, resp. zwei ungleichartige Elemente P_1 und g_1 des andern zugewiesen sind, von welchen auch P_1 in g_1 liegt.

Es folgt aus diesen Definitionen sofort:

Perspectivische Grundgebilde der 2. Stufe sind auch collinear. Wenn zwei Grundgebilde einem dritten collinear sind, so sind sie auch einander collinear.

Damit ist zugleich bewiesen, dass in einer Reihe von Grundgebilden der II. Stufe, von denen jedes zum folgenden perspectivisch liegt, je zwei collinear sind, also namentlich auch das erste und das letzte.

Die Bezeichnung *collinear* hat Möbius in seinem ausgezeichneten Werke „Der barycentrische Calcul“ zunächst für ebene Systeme gewählt, die in der angegebenen Weise auf einander bezogen sind; und zwar soll dieser Ausdruck andeuten, dass nicht nur jedem Punkte des einen Systems ein Punkt des andern, sondern auch jeder geraden Linie wieder eine gerade Linie entspricht. Wir können nämlich zwei ebene Systeme auch z. B. so auf einander beziehen, dass wohl jedem Punkte des einen wieder ein Punkt des andern, dagegen jeder Geraden ein Kegelschnitt entspricht. XIII

Das bereits früher aufgestellte, aber noch nicht allgemein bewiesene Gesetz der Reciprocität oder Dualität führt uns noch zu einer zweiten einfachen Verwandtschaft zwischen Grundgebilden höherer Stufe, zu der sogenannten Verwandtschaft der Reciprocität. Wir nennen nämlich reciprok verwandt oder kürzer reciprok:

- 1) Zwei ebene Systeme Σ und Σ_1 , wenn jedem Punkte P von Σ eine Gerade p_1 von Σ_1 entspricht, und jeder durch P gehenden Geraden g von Σ ein in p_1 liegender Punkt G_1 von Σ_1 ;
- 2) ein ebenes System Σ und einen Strahlenbündel S_1 , wenn jedem Punkte P von Σ eine Ebene π_1 von S_1 entspricht, und jeder durch P gehenden Geraden g von Σ ein in π_1 liegender Strahl g_1 von S_1 ;
- 3) zwei Strahlenbündel S und S_1 , wenn jedem Strahle g von S eine Ebene γ_1 von S_1 entspricht, und jeder durch g gehenden Ebene ε von S ein in γ_1 liegender Strahl e_1 von S_1 .

Kürzer, und dann auch auf räumliche Systeme anwendbar lässt sich diese Erklärung der Reciprocität wie folgt aussprechen:

Zwei Grundgebilde der zweiten Stufe oder auch zwei räumliche Systeme heissen reciprok, wenn je zwei ungleichartigen Elementen P, g des einen, von welchen P in g liegt, resp. zwei ungleichartige Elemente p_1, G_1 des andern zugewiesen sind, von welchen p_1 durch G_1 geht.

Die Möglichkeit dieser Art der Verwandtschaft werde ich Ihnen noch beweisen, da sie keineswegs wie diejenige der Collineation ohne Weiteres einleuchtet; nur für einen speciellen Fall ist dieser Beweis bereits geführt, indem gezeigt wurde, dass in Bezug auf eine Curve II. Ordnung jedem Punkt P der Ebene eine Gerade, nämlich seine Polare p_1 , entspricht, und jeder durch P gehenden Geraden der Ebene ein auf p_1 liegender Punkt, näm-

lich der Pol jener Geraden. Der allgemeine Beweis schliesst denjenigen des Reciprocitäts-Gesetzes in sich; denn weil z. B. in reciproken räumlichen Systemen jedem Punkte eine Ebene entspricht, so folgt aus jeder Eigenschaft eines Systems von Punkten unmittelbar die entsprechende Eigenschaft eines Systems von Ebenen, welches jenem Punktsystem reciprok ist.

Die Untersuchung reciproker Grundgebilde ist ausserdem dadurch besonders wichtig, dass sie diejenige collinearer Grundgebilde in sich enthält, wenn nicht besondere Lagen derselben in Betracht kommen. Dieses wird Ihnen aus folgendem Satz einleuchten:

Wenn zwei Grundgebilde einem dritten reciprok sind, so sind sie einander collinear; und wenn umgekehrt das eine von zwei collinearen Grundgebilden einem dritten reciprok ist, so ist auch das andere demselben reciprok.

Wenn nämlich z. B. zwei ebene Systeme Σ_1 und Σ_2 einem dritten Σ reciprok sind, so entspricht jedem Punkte P des letzteren je eine Gerade p_1 und p_2 der ersteren, und jeder durch P gehenden Geraden g von Σ entspricht in Σ_1 und Σ_2 je ein auf p_1 resp. p_2 liegender Punkt G_1 oder G_2 . Folglich entspricht jeder Geraden p_1 von Σ_1 eine Gerade p_2 von Σ_2 , und jedem auf p_1 liegenden Punkte G_1 von Σ_1 ein auf p_2 liegender Punkt G_2 von Σ_2 ; d. h. Σ_1 und Σ_2 sind collinear. Auf analoge Weise wird dieser und der zweite Theil des Satzes für alle andern Fälle bewiesen; doch lassen sich solche auch sofort auf den vorliegenden Fall zurückführen durch die Bemerkung, dass wir für jeden Strahlenbündel einen ebenen Schnitt desselben substituieren können.

Zwei collineare oder reciproke Grundgebilde werden auch projectivisch genannt, weil jedem harmonischen Gebilde des einen ein harmonisches Gebilde des andern entspricht. Denn seien z. B. A, B, C, D vier harmonische Punkte eines ebenen Systemes Σ , und a_1, b_1, c_1, d_1 die entsprechenden vier Strahlen eines zu Σ reciproken ebenen Systemes Σ_1 , so müssen zunächst a_1, b_1, c_1 und d_1 durch einen Punkt U_1 gehen (Fig. 1), weil A, B, C und D auf einer Geraden u liegen. Jedem Viereck $KLMN$ in Σ , von welchen zwei Gegenseiten sich in A , zwei andere in C schneiden, während die letzten beiden Seiten beziehungsweise durch B und D gehen, entspricht dann in Σ_1 ein Vierseit $k_1 l_1 m_1 n_1$, von welchem je zwei gegenüberliegende Eckpunkte in a_1 und c_1 , und die letzten beiden Eckpunkte beziehungsweise auf

b_1 und d_1 liegen. Folglich sind a_1, b_1, c_1, d_1 wirklich vier harmonische Strahlen (I. Abth. pag. 36). Ich empfehle Ihnen sehr, zur Uebung auch für zwei collineare Systeme den Beweis zu führen, obwohl er in dem soeben geführten schon enthalten ist.

Es ergibt sich aus dieser Untersuchung der Satz:

Je zwei einförmige Gebilde, welche in collinearen oder reciproken Grundgebilden einander entsprechen, sind projectivisch.

Denn je vier harmonischen Elementen des einen entsprechen, stets vier harmonische Elemente des anderen Gebildes, wie verlangt wird.

Dieser Satz giebt uns ein Mittel an die Hand, zwei Grundgebilde zweiter Stufe projectivisch auf einander zu beziehen. Sollen z. B. zwei ebene Systeme Σ und Σ_1 reciprok auf einander bezogen werden, so müssen wir jedem Punkte von Σ einen Strahl von Σ_1 und jedem geraden Gebilde von Σ einen zu ihm projectivischen Strahlenbüschel von Σ_1 zuweisen, und umgekehrt. Wir nehmen desshalb in Σ (Fig. 2) zwei gerade Gebilde u und v an, und weisen diesen in Σ_1 zwei beliebige Strahlenbüschel U_1 und V_1 als entsprechende zu, indem wir u auf U_1 und v auf V_1 projectivisch beziehen, so jedoch, dass dem gemeinschaftlichen Punkte P von u und v der gemeinschaftliche Strahl p_1 von U_1 und V_1 entspricht. Jeder nicht durch P gehende Strahl k von Σ schneidet dann die resp. Geraden u und v in zwei Punkten A und D , welchen in den Büscheln U_1 und V_1 von Σ_1 die resp. Strahlen a_1 und d_1 entsprechen; und der Schnittpunkt K_1 dieser letzteren ist folglich zu jenem Strahle k der entsprechende. Den sämtlichen Strahlen eines Punktes S entsprechen ferner die sämtlichen Punkte einer Geraden s_1 ; denn durch den Strahlenbüschel S werden die geraden Gebilde u und v perspectivisch auf einander bezogen, so dass sie den Punkt P entsprechend gemein haben, und daher auch die Strahlenbüschel U_1 und V_1 projectivisch so, dass sie den Strahl p_1 entsprechend gemein haben. Diese Büschel liegen also ebenfalls perspectivisch, und erzeugen somit ein gerades Gebilde s_1 , welches jenem Strahlenbüschel S entspricht. Sie erkennen hieraus, dass durch die einander zugewiesenen projectivischen Gebilde u und U_1 , sowie v und V_1 jedem Strahle k von Σ ein Punkt K_1 von Σ_1 zugewiesen ist, jedem auf k liegenden Punkte S aber ein durch K_1 gehender Strahl s_1 , so dass wirklich Σ und Σ_1 reciprok auf einander bezogen sind. Da hiernach zu jedem ebenen Gebilde ein reciprokes construirt werden

kann, so ist das Reciprocitätsgesetz für ebene Systeme, oder wie wir sogleich sehen werden für Grundgebilde der zweiten Stufe von Neuem bewiesen.

Sollen zwei ebene Systeme Σ und Σ_1 collinear auf einander bezogen werden, so brauchen wir nur beide in der soeben angegebenen Weise reciprok auf ein drittes zu beziehen. Daraus ergeben sich folgende direkte Methoden:

- 1) Wir nehmen in Σ und Σ_1 je zwei gerade Gebilde u, v und u_1, v_1 willkürlich an, und beziehen u auf u_1 und v auf v_1 projectivisch, so jedoch, dass der gemeinschaftliche Punkt von u und v dem gemeinschaftlichen Punkte von u_1 und v_1 entspricht.
- 2) Oder wir weisen irgend zwei Strahlenbüscheln U und V von Σ zwei beliebige Strahlenbüschel U_1 und V_1 von Σ_1 , als entsprechende zu, und beziehen U auf U_1 , sowie V auf V_1 projectivisch so, dass der Strahl $\overline{UV}$ von Σ dem Strahle $\overline{U_1V_1}$ von Σ_1 entspricht.

Diese direkten Methoden können auch direkt leicht bewiesen werden auf analoge Weise, wie die vorhin für reciproke Systeme angegebene Methode.

Sollen zwei Strahlenbündel, oder ein Strahlenbündel und ein ebenes System entweder reciprok oder collinear auf einander bezogen werden, so können auch hierfür leicht ähnliche Methoden wie die obigen aufgestellt und bewiesen werden. Doch ist es einfacher, wenn wir diese Fälle auf die schon erledigten dadurch zurückführen, dass wir jedem Strahlenbündel einen ebenen Schnitt desselben substituieren. So z. B. gilt der Satz:

„Um zwei Strahlenbündel S und S_1 reciprok auf einander zu beziehen, können in dem einen S zwei Strahlenbüschel α und β und im andern S_1 zwei Ebenenbüschel a_1 und b_1 willkürlich angenommen, und sodann α auf a_1 und β auf b_1 projectivisch bezogen werden, so dass dem gemeinschaftlichen Strahle $\overline{\alpha\beta}$ der Strahlenbüschel die gemeinschaftliche Ebene $\overline{a_1b_1}$ der Ebenenbüschel entspricht. Dadurch ist sodann jedem Elemente des Bündels S ein bestimmtes Element des Bündels S_1 zugewiesen.“

Diese Methode folgt sofort aus derjenigen, welche vorhin für ebene Systeme bewiesen wurde.

Um die Systeme Σ und Σ_1 (Fig. 2) reciprok auf einander zu beziehen, haben wir vorhin die Geraden u und v in Σ , sowie die

entsprechenden Punkte U_1 und V_1 in Σ_1 ganz beliebig angenommen. Ferner durften wir u auf U_1 und v auf V_1 in ganz beliebiger Weise projectivisch beziehen; nur die eine Bedingung musste erfüllt werden, dass dem Schnittpunkte uv oder P die Verbindungslinie $\overline{U_1 V_1}$ oder p_1 entspreche. Wir dürfen also noch zwei beliebigen Punkten A und B von u zwei beliebige Strahlen a_1 und b_1 von U_1 als entsprechende zuweisen, und ebenso irgend zwei Punkten C und D von v zwei beliebige Strahlen c_1 und d_1 von V_1 , wodurch dann aber jedem Element von Σ ein bestimmtes Element von Σ_1 zugewiesen ist. Offenbar kann $ABCD$ als ein ganz beliebiges Viereck der Ebene Σ angesehen werden, weil die Geraden u und v , und in diesen die Punkte A, B und C, D ausserhalb des Schnittpunktes P ganz willkürlich gewählt werden können; und ebenso ist $a_1 b_1 c_1 d_1$ als ein ganz beliebiges Vierseit von Σ_1 aufzufassen. Daraus ergibt sich der Satz:

Sollen zwei ebene Systeme Σ und Σ_1 reciprok auf einander bezogen werden, so kann man den Endpunkten A, B, C, D irgend eines Vierecks von Σ die resp. Seiten a_1, b_1, c_1, d_1 eines beliebigen Vierseits von Σ_1 willkürlich zuweisen, wodurch dann aber jedem Elemente von Σ ein bestimmtes Element von Σ_1 zugewiesen ist.

Ebenso können zwei ebene Systeme auf eine einzige Weise collinear so auf einander bezogen werden, dass zwei Vierecke oder zwei Vierseite derselben auf bestimmte Art einander entsprechen. Ueberhaupt lässt sich unser Satz sofort auf beliebige Grundgebilde der zweiten Stufe ausdehnen, da alle möglichen Fälle auf den soeben erörterten zurückgeführt werden können; er lautet sodann:

Zwei Grundgebilde der zweiten Stufe lassen sich auf eine einzige Weise projectivisch auf einander beziehen, so dass irgend vier gleichartigen Elementen A, B, C, D des einen, von welchen jedoch keine drei zu einem und demselben einförmigen Grundgebilde gehören, vier solche Elemente A_1, B_1, C_1, D_1 des andern als resp. entsprechende willkürlich zugewiesen werden.

Je zwei einander entsprechende Elemente, wie A und A_1 , sind die Träger von zwei einförmigen Grundgebilden, und diese können und müssen projectivisch auf einander bezogen werden, so dass den Elementen AB, AC und AD die resp. Elemente $A_1 B_1, A_1 C_1$ und $A_1 D_1$ entsprechen. Daraus lässt sich auch direkt die Richtigkeit unseres Satzes beweisen.

glt

~~Zweiter Vortrag.~~Curven, welche in collinearen oder reciproken ebenen Systemen einander entsprechen.

Die Verwandtschaften der Collineation und der Reciprocität lassen sich mit vielem Nutzen dazu verwenden, gegebene Gebilde, z. B. Curven oder Flächen, in andere zu verwandeln. Nicht selten gelingt es dadurch, Sätze, welche an besonderen Gebilden aufgefunden sind, zu verallgemeinern; so z. B. sind manche Eigenschaften des Kreises mittelst der projectivischen Verwandtschaft auch für beliebige Kegelschnitte nachgewiesen worden. Ueber diese Verwandlung von gegebenen Gebilden in andere bieten sich uns einige allgemeine Bemerkungen dar.

Seien Σ und Σ_1 zwei collineare ebene Systeme, P und P_1 irgend zwei einander entsprechende Punkte derselben. Wenn dann P in Σ irgend eine Curve k durchläuft, so beschreibt zugleich P_1 in Σ_1 eine Curve k_1 , welche zu k collinear ist. Nämlich wenn P sich stetig bewegt, so muss auch P_1 sich stetig bewegen, weil die beiden Strahlen, durch welche irgend zwei einander entsprechende feste Punkte von Σ und Σ_1 mit resp. P und P_1 verbunden werden, zwei projectivische und daher auch stetige Strahlenbüschel beschreiben. Wenn nun die Curve k von irgend einer Geraden g in n Punkten geschnitten wird, so muss auch k_1 von der entsprechenden Geraden g_1 in n Punkten geschnitten werden; nämlich in denjenigen Punkten, welche den Schnittpunkten von k und g entsprechen. Fallen von den Schnittpunkten von k und g irgend zwei zusammen, so dass die Curve k von der Geraden g berührt wird, so fallen auch die entsprechenden beiden Schnittpunkte von k_1 und g_1 zusammen, und k_1 wird von g_1 berührt; zugleich sind die Berührungspunkte in g und g_1 zwei einander entsprechende Curvenpunkte. Die Tangenten an zwei einander entsprechenden Punkten der Curven k und k_1 sind also zwei einander entsprechende Strahlen der collinearen Systeme Σ und Σ_1 . Jeder Tangente, die aus einem beliebigen Punkte A von Σ an die Curve k gelegt werden kann, entspricht eine Tangente von k_1 , die durch den homologen Punkt A_1 von Σ_1 hindurchgeht; so

dass von A_1 an k_1 ebenso viele Tangenten gelegt werden können, wie von A an k . Geht k mehrmals durch einen Punkt von Σ , so geht k_1 ebenso oft durch den entsprechenden Punkt von Σ_1 u. s. w.

Man pflegt die ebenen Curven zu unterscheiden in Bezug auf ihre Ordnung und ihre Classe; nämlich:

Eine ebene Curve n ter Ordnung hat mit einer beliebigen sie schneidenden Geraden im Allgemeinen und höchstens n Punkte gemein.

An eine ebene Curve n ter Classe können aus einem beliebigen Punkte ihrer Ebene im Allgemeinen und höchstens n Tangenten gezogen werden.

Hiernach können wir die wichtigeren der soeben gefundenen Sätze wie folgt zusammenfassen:

Zwei Curven k und k_1 , welche in collinearen ebenen Systemen einander entsprechen, sind von gleicher Ordnung und gleicher Classe. Jedem vielfachen Punkte von k entspricht ein vielfacher Punkt von derselben Ordnung in k_1 ; ebenso jeder mehrfachen Tangente von k eine solche von k_1 .

Ist z. B. k eine Curve zweiter Ordnung, so muss auch k_1 eine solche sein; und zwar lässt sich leicht zeigen, dass k_1 auch die projectivischen Eigenschaften mit k theilt, und nicht bloss wie k mit jeder sie schneidenden Geraden im Allgemeinen und höchstens zwei Punkte gemein hat. Denn wenn k durch zwei projectivische Strahlenbüschel A und B erzeugt wird, so wird k_1 durch die entsprechenden beiden Strahlenbüschel A_1 und B_1 erzeugt; und es ist $A_1 \propto B_1$, weil $A \propto A_1$ und $B \propto B_1$, sodass auch k_1 als Schnitt von zwei projectivischen Strahlenbüscheln zu betrachten ist. Zugleich ergibt sich hieraus:

„Zwei Curven II. Ordnung, welche in collinearen ebenen Systemen einander entsprechen, sind projectivisch auf einander bezogen.“

Wir können diesen Satz auch umkehren; nämlich:

„Zwei projectivische Curven II. Ordnung können stets als einander entsprechende Curven in zwei collinearen ebenen Systemen betrachtet werden.“

Seien nämlich A, B, C irgend drei Punkte der ersten Curve k und A_1, B_1, C_1 die ihnen resp. entsprechenden Punkte der zweiten Curve k_1 , sei ferner D der Pol von $\overline{AB}$ in Bezug auf k und D_1 derjenige von $\overline{A_1 B_1}$ in Bezug auf die Curve k_1 . Gehören dann die Curven zwei collinearen ebenen Systemen als einander ent-



sprechende an, so müssen die Tangenten von k in A und B auch den Tangenten von k_1 in A_1 und B_1 entsprechen, und folglich sind auch die Punkte D und D_1 zwei einander entsprechende Punkte der collinearen Systeme. Die ebenen Systeme, in welchen die Curven liegen, lassen sich nun aber wirklich collinear so auf einander beziehen, dass den vier Punkten A, B, C, D des einen die resp. Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 des andern entsprechen; und der Curve k , welche durch C geht, und in A und B die Geraden $\overline{DA}$ und $\overline{DB}$ berührt, entspricht alsdann die Curve k_1 , welche durch C_1 geht, und in A_1 und B_1 die Geraden $D_1 A_1$ und $D_1 B_1$ berührt. Die collineare Verwandtschaft der ebenen Systeme ist, wie Sie sehen, durch die projectivische Verwandtschaft der beiden Curven völlig und eindeutig bestimmt.

Wenn auch collineare Curven von derselben Ordnung und Classe sind, so können sie doch in einer Beziehung wesentliche Unterschiede darbieten, nämlich in Bezug auf ihre unendlich fernen Punkte. Seien wiederum Σ und Σ_1 die collinearen ebenen Systeme, von welchen zwei solche Curven k und k_1 homologe Gebilde sind, und mögen den Punkten A, B von Σ die resp. Punkte A_1 und B_1 von Σ_1 entsprechen. Irgend zwei durch resp. A und B gelegten und zu einander parallelen Strahlen a und b von Σ entsprechen dann in Σ_1 zwei Strahlen a_1 und b_1 , welche durch resp. A_1 und B_1 gehen, aber nicht nothwendig parallel zu sein brauchen. Dem unendlich fernen Punkte, in welchem a und b sich schneiden, entspricht also im Allgemeinen ein eigentlicher Schnittpunkt von a_1 und b_1 ; der Verbindungslinie von irgend zwei unendlich fernen Punkten des Systems Σ , d. h. der unendlich fernen Geraden von Σ entspricht daher im Allgemeinen eine Verbindungslinie von zwei eigentlichen Punkten, d. h. eine eigentliche Gerade in Σ_1 ; und ebenso entspricht der unendlich fernen Geraden von Σ_1 im Allgemeinen eine eigentliche Gerade in Σ . Den unendlich fernen Punkten der Curve k entsprechen desshalb nicht nothwendig wieder unendlich ferne Punkte von k_1 ; und ebenso wenig den Asymptoten von k , d. h. den Tangenten von unendlich fernen Punkten, wieder Asymptoten von k_1 . Vielmehr kann z. B. eine Ellipse mit einer Parabel oder Hyperbel collinear verwandt sein, so dass jedem unendlich fernen Punkte der letzteren ein eigentlicher Punkt der Ellipse entspricht.

Sind Σ und Σ_1 zwei reciproke ebene Systeme, so entspricht jedem Punkte P von Σ ein Strahl p_1 von Σ_1 . Durchläuft P in

Σ irgend eine Curve k , so beschreibt gleichzeitig p_1 eine stetige Aufeinanderfolge K_1 von Strahlen, welche ein Strahlenbüschel heissen soll. Nähert sich P einem festen Punkte Q der Curve k , so nähert sich p_1 einem festen Strahle q_1 des Büschels K_1 , und dem Strahle PQ , der sich um Q dreht, entspricht dann der Punkt $p_1 q_1$, welcher auf der Geraden q_1 fortgleitet. Und wie PQ schliesslich, wenn P ins Unbegrenzte dem Punkte Q sich nähert (Fig. 3), mit einer festen Geraden, nämlich mit der Tangente q des Punktes Q zusammenfällt, so fällt auch $p_1 q_1$ schliesslich mit einem festen Punkte zusammen, nämlich mit dem Berührungspunkte Q_1 des Strahles q_1 , welcher also jener Tangente entspricht (vergl. I. Abth. pag. 66). Jedem Punkte Q der Curve k nebst seiner Tangente q entspricht demnach ein Strahl q_1 des Büschels K_1 nebst seinem Berührungspunkte Q_1 ; und den stetig auf einander folgenden Tangenten von k entsprechen stetig auf einander folgende Berührungspunkte von K_1 . Mit einem Wort: dem Büschel K von Tangenten, welche die Curve k einhüllen, entspricht eine Curve k_1 , welche vom Büschel K_1 eingehüllt wird. Wenn k mit irgend einer Geraden g ihrer Ebene n Punkte gemein hat, so gehen die entsprechenden n Strahlen des Büschels K_1 oder Tangenten der Curve k_1 durch denjenigen Punkt von Σ_1 , welcher jener Geraden entspricht. Ueberhaupt gilt folgender Satz:

Wenn zwei Curven k und k_1 in reciproken Systemen einander entsprechen, so ist die Ordnung der einen gleich der Classe der andern. Jedem Punkte der einen Curve nebst dessen Tangente entspricht eine Tangente der andern nebst deren Berührungspunkt; jedem mehrfachen Punkte der einen entspricht eine mehrfache Tangente der anderen.

Ist insbesondere k eine Curve II. Ordnung, so ist k_1 eine Curve zweiter Classe, welche nämlich von einem Strahlenbüschel II. Ordnung eingehüllt wird. Dieser Büschel wird durch zwei projectivische gerade Gebilde a_1 und b_1 erzeugt, wenn die Curve k durch zwei projectivische Strahlenbüschel A und B erzeugt ist; denn weil $a_1 \propto A$ und $b_1 \propto B$, so folgt aus $A \propto B$ auch $a_1 \propto b_1$. — Wir haben schon früher gesehen, dass jede Curve zweiter Ordnung von einem Büschel zweiter Ordnung eingehüllt wird und also auch von der zweiten Classe ist; bei Curven höherer Ordnung oder Classe findet eine solche Uebereinstimmung nicht mehr Statt.

Ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich über Kegelflächen anstellen, welche in projectivischen Strahlenbündeln einander ent-

reciproke

Kurven

sprechen. Doch können Sie alle Resultate, welche sich für solche Kegelflächen ergeben, auch aus dem soeben gewonnenen ableiten, indem Sie zwei projectivische ebene Systeme aus irgend zwei Mittelpunkten durch Strahlenbündel projeciren. Dabei ergibt sich u. A. auch, was unter Kegelflächen n ter Ordnung oder n ter Classe zu verstehen ist. Wird z. B. ein ebenes System Σ auf einen Strahlenbündel S_1 reciprok bezogen, so entspricht jeder Curve n ter Ordnung und p ter Classe von Σ eine Kegelfläche n ter Classe und p ter Ordnung in S_1 . 39

~~Dritter Vortrag.~~

Perspectivische Lage collinearer Grundgebilde der zweiten Stufe.

Wir haben gesehen, dass in zwei collinearen reciproken Grundgebilden je vier harmonische Elemente des einen stets wieder vier harmonischen Elementen des andern entsprechen, und daraus bereits den Schluss gezogen, dass irgend zwei einander entsprechende einförmige Grundgebilde derselben projectivisch sein müssen. Haben also zwei collineare oder reciproke Grundgebilde Σ und Σ_1 eine solche Lage, dass nicht allein die Träger a und a_1 von irgend zwei einander entsprechenden einförmigen Grundgebilden, sondern auch drei Paare homologer Elemente der letzteren auf einander fallen, so müssen je zwei einander entsprechende Elemente von a und a_1 zusammenfallen (I. Abth. pag. 44), und Σ und Σ_1 haben somit jedes Element von a und a_1 entsprechend gemein. Insbesondere also gilt der Satz;

Wenn zwei collineare ebene Systeme, die nicht in derselben Ebene liegen, drei Punkte ihrer Schnittlinie entsprechend gemein haben, so haben sie jeden Punkt derselben entsprechend gemein.

Wenn zwei collineare Strahlenbündel, die nicht concentrisch liegen, drei durch ihren gemeinschaftlichen Strahl gehende Ebenen entsprechend gemein haben, so haben sie jede solche Ebene entsprechend gemein.

Mit einer geringen Veränderung lässt sich dieser Doppelsatz auch

für ebene Systeme, die auf einander liegen, sowie für concentrische Strahlenbündel aufstellen.

Wenn zwei in derselben Ebene liegende collineare Systeme Σ und Σ_1 die sämtlichen Punkte von zwei Geraden u und v oder die sämtlichen Strahlen von zwei Büscheln S und T entsprechend gemein haben, so fällt jedes Element von Σ mit seinem entsprechenden von Σ_1 zusammen. Denn im ersten Falle entspricht jede Gerade der Ebene sich selbst, weil sie zwei sich selbst entsprechende Punkte verbindet, nämlich einen Punkt von u mit einem Punkte von v ; und jeder Punkt der Ebene entspricht sich selbst, weil er als Schnittpunkt solcher sich selbst entsprechender Geraden angesehen werden kann. Ebenso entspricht im zweiten Falle jeder Punkt der Ebene sich selbst, weil in ihm zwei sich selbst entsprechende Strahlen der Büschel S und T sich schneiden, jede Gerade der Ebene aber kann als Verbindungslinie solcher Punkte aufgefasst werden. Wir werden hierdurch zu folgendem Satze geführt.

Zwei in derselben Ebene liegende collineare Systeme haben alle ihre Elemente entsprechend gemein (oder sind identisch), wenn sie die Eckpunkte eines Vierecks, oder auch die Seiten eines Vierseits entsprechend gemein haben.

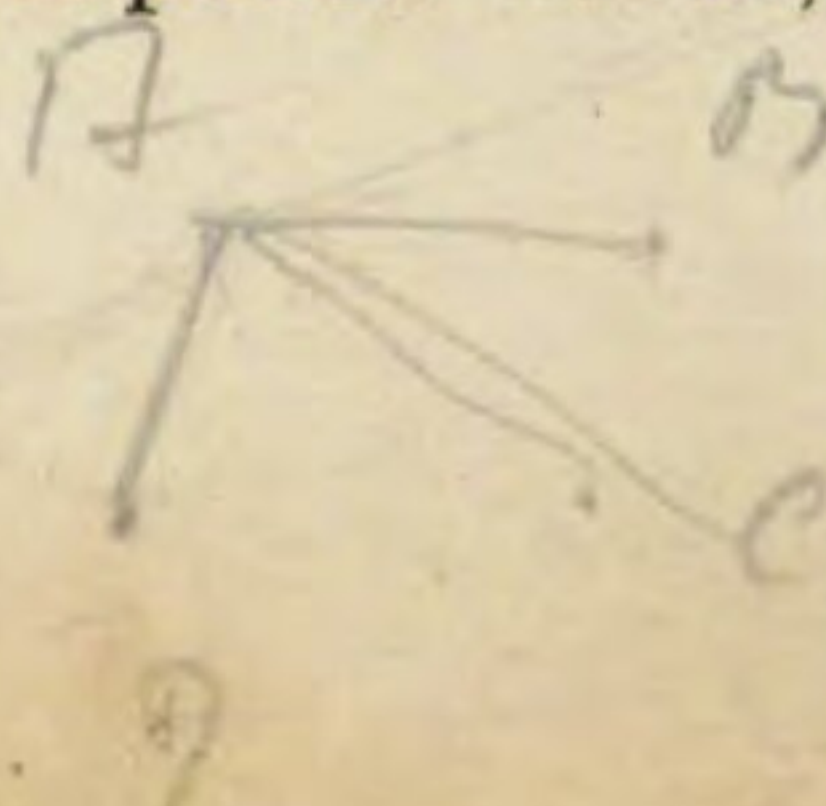
Zwei concentrische collineare Strahlenbündel haben alle ihre Elemente entsprechend gemein (oder sind identisch), wenn sie die Kanten eines Vierecks oder auch die Seiten eines Vierseits entsprechend gemein haben.

Der Satz rechts wird auf denjenigen links sofort zurückgeführt, indem wir die beiden Strahlenbündel durch eine Ebene schneiden. Die collinearen Systeme, welche in dieser liegen, haben aber die Eckpunkte A, B, C, D eines Vierecks oder auch eines einfachen Vierseits entsprechend gemein, desshalb aber auch die Strahlen $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ und folglich jeden Strahl des Büschels A , sowie die Strahlen $\overline{BA}, \overline{BC}, \overline{BD}$ und folglich jeden Strahl des Büschels B : woraus der Satz folgt. Zwei beliebig auf einander gelegte collineare Systeme haben daher im Allgemeinen höchstens drei Punkte und deren Verbindungslinien entsprechend gemein.

Aus dem soeben bewiesenen Satze lassen sich folgende Schlüsse ziehen in Betreff der perspectivischen Lage collinearer Systeme und Strahlenbündel.

Wenn zwei collineare Systeme Σ und Σ_1 in verschiedenen Ebenen liegen, und irgend vier

Wenn zwei collineare Strahlenbündel S und S_1 verschiedene Mittelpunkte haben, und irgend



Strahlen, welche die Eckpunkte eines Vierecks von Σ mit den resp. entsprechenden Punkten von Σ_1 verbinden, sich in einem Punkte S schneiden, so liegen die Systeme perspectivisch und sind Schnitte des Strahlenbündels S . Denn die beiden collinearen Strahlenbündel, durch welche die ebenen Systeme ausprojeicirt werden, sind identisch, weil sie ein Vierkant entsprechend gemein haben.

vier Strahlen, in welchen die Seitenebenen eines Vierseits von S durch die resp. entsprechenden Ebenen von S_1 geschnitten werden, in einer Ebene Σ liegen, so sind die Bündel perspectivisch und Scheine des ebenen Systemes Σ . Denn die beiden collinearen Systeme, in welchen die Strahlenbündel durch Σ geschnitten werden, sind identisch, weil sie ein Vierseit entsprechend gemein haben.

Ich überlasse Ihnen den ganz ähnlichen Beweis des Satzes: „Ein ebenes System Σ liegt perspectivisch zu einem ihm collinearen Strahlenbündel S , wenn die Eckpunkte eines Vierecks von Σ auf den ihnen entsprechenden Strahlen von S liegen.“

Ihnen wird die Analogie nicht entgangen sein, welche zwischen diesen Theoremen und denjenigen herrscht, die wir für projectivische Grundgebilde der ersten Stufe im fünften Vortrag der ersten Abtheilung kennen gelernt haben. Aehnliches lässt sich von dem folgenden Doppelsatze bemerken, welchen ich später häufig benutzen werde.

Wenn zwei collineare ebene Systeme drei und folglich alle Punkte eines geraden Gebildes u entsprechend gemein haben, so schneiden sich die Verbindungslinien von je zwei einander entsprechenden Punkten derselben in einem festen Punkte S . — Nämlich beliebige zwei einander entsprechende Gerade l und l_1 (Fig. 4) müssen irgend einen Punkt A von u entsprechend gemein haben, weil jeder Punkt von u sich selbst entspricht. Die sämtlichen Geraden $\overline{DD_1}$, $\overline{EE_1}$, ... welche je einen Punkt $(D, E, \dots)$ von l mit dem ihm

Wenn zwei collineare Strahlenbündel drei und folglich alle Ebenen eines Büschels u entsprechend gemein haben, so liegen die Schnittlinien von je zwei einander entsprechenden Ebenen derselben in einer festen Ebene Σ . — Nämlich beliebige zwei einander entsprechende Strahlen l und l_1 müssen in irgend einer Ebene δ von u liegen, weil jede Ebene von u sich selbst entspricht. Die sämtlichen Strahlen $\overline{\delta\delta_1}$, $\overline{\varepsilon\varepsilon_1}$, ... in denen je eine Ebene $(\delta, \varepsilon, \dots)$ des Büschels l von der ihr entsprechenden Ebene $(\delta_1, \varepsilon_1, \dots)$ des Büschels

entsprechenden Punkte ($D_1, E_1, \dots$) von l_1 verbinden, gehen daher durch einen Punkt S , weil die geraden Gebilde l und l_1 ihren Schnittpunkt A entsprechend gemein haben und somit perspectivisch sind. Liegen nun die Systeme in einer Ebene, und ist P der Schnittpunkt eines durch S gehenden Strahles $\overline{DD_1}$ mit der Geraden u , so entspricht die Gerade $\overline{PD}$ der Geraden $\overline{PD_1}$, also sich selbst, weil P sich selbst entspricht. Jeder durch S gehende Strahl fällt also mit seinem entsprechenden zusammen, woraus folgt, dass je zwei einander entsprechende Punkte auf einem durch S gehenden Strahle liegen. Schneiden sich dagegen die Systeme in der Geraden u , so folgt, dass je zwei Verbindungslinien homologer Punkte, wie $\overline{DD_1}$ und $\overline{EE_1}$, in einer Ebene liegen und somit einander schneiden. Weil aber nicht alle diese Verbindungslinien in einer und derselben Ebene liegen, so müssen sie sich in einem und demselben Punkte S schneiden, und die Systeme sind Schnitte des Strahlenbündels S .

Wir können diese bemerkenswerthen Sätze auch in folgender Form aussprechen:

Zwei collineare ebene Systeme, die sich schneiden und drei Punkte ihrer Schnittlinie entsprechend gemein haben, liegen perspectivisch.

l_1 geschnitten wird, liegen daher in einer Ebene Σ ; denn die Büschel haben die Ebene α entsprechend gemein und somit perspectivische Lage. Haben nun die Strahlenbündel denselben Mittelpunkt, und ist π die Ebene, welche einen beliebigen in Σ liegenden Strahl $\overline{\delta\delta_1}$ mit der Axe u verbindet, so entspricht der Strahl $\overline{\pi\delta}$ dem Strahle $\overline{\pi\delta_1}$, also sich selbst, weil π sich selbst entspricht. Jeder in Σ liegende Strahl fällt also mit seinem entsprechenden zusammen, woraus folgt, dass je zwei einander entsprechende Ebenen sich in einem Strahle der Ebene Σ schneiden. Haben dagegen die Bündel zwei verschiedene in der Axe u liegende Mittelpunkte, so folgt, dass je zwei Schnittlinien homologer Ebenen, wie $\overline{\delta\delta_1}$ und $\overline{\varepsilon\varepsilon_1}$, in einer Ebene liegen und somit einander schneiden. Weil aber nicht alle diese Schnittlinien durch einen und denselben Punkt gehen, so müssen sie in einer und derselben Ebene Σ liegen, und die Strahlenbündel sind Scheine des ebenen Systemes Σ .

Zweicollineare Strahlenbündel, die nicht concentrisch sind und drei Ebenen ihres gemeinschaftlichen Strahles entsprechend gemein haben, liegen perspectivisch.

Wenn zwei in einer Ebene liegende collineare Systeme ein gerades Gebilde (d. h. jeden Punkt desselben) entsprechend gemein haben, so haben sie auch einen Strahlenbüschel (d. h. jeden Strahl desselben) entsprechend gemein.

Wenn zwei concentrische und collineare Strahlenbündel einen Ebenenbüschel (d. h. jede Ebene desselben) entsprechend gemein haben, so haben sie auch einen Strahlenbüschel entsprechend gemein.

Dass auch umgekehrt zwei perspectivische ebene Systeme jeden Punkt ihrer Schnittlinie und zwei perspectivische Strahlenbündel jede durch beide Mittelpunkte gehende Ebene entsprechend gemein haben, leuchtet ohne Weiteres ein. Aber auch die letzten beiden Sätze lassen sich umkehren, so dass wir auch behaupten können:

Wenn zwei in einer Ebene liegende collineare Systeme einen Strahlenbüschel entsprechend gemein haben, so haben sie auch ein gerades Gebilde entsprechend gemein.

Wenn zwei concentrische und collineare Strahlenbündel einen Strahlenbüschel entsprechend gemein haben, so haben sie auch einen Ebenenbüschel entsprechend gemein.

Denn wenn wir links die Systeme aus einem beliebigen Mittelpunkte durch zwei concentrische Strahlenbündel projiciren, so haben diese einen Ebenenbüschel und folglich (nach dem vorhergehenden Satze rechts) auch einen Strahlenbüschel entsprechend gemein, von welchem das im Satz genannte gerade Gebilde ein Schnitt ist. Ebenso wird der Satz rechts auf den vorhergehenden links zurückgeführt, wenn wir die concentrischen Strahlenbündel durch eine Ebene in zwei auf einander liegenden Systemen schneiden. Uebrigens können Sie den letzten Doppelsatz auch direkt beweisen auf analoge Weise wie den vorigen.

Zwei in derselben Ebene liegende collineare Systeme, welche ein gerades Gebilde u und einen Strahlenbüschel S entsprechend gemein haben, werden auch perspectivisch genannt, weil sie viele Eigenschaften zeigen, die auch sonst perspectivisch liegenden Systemen zukommen. Der Punkt S , welcher mit je zwei einander entsprechenden Punkten in einer und derselben Geraden liegt, heisst das Centrum, und die Gerade u , auf welcher je zwei einander entsprechende Gerade sich schneiden, die Axe der Collineation. Stellen Sie sich vor, von zwei perspectivischen ebenen Systemen im Raume drehe sich das eine um seine Schnittlinie

*Punkt-
reue*

mit dem anderen System, so werden freilich die Verbindungslinien homologer Punkte gleichzeitig ihre Lage ändern, aber doch beständig nach einem gleichfalls sich bewegendem Punkte convergiren, weil die Systeme jeden Punkt ihrer Schnittlinie entsprechend gemein haben. Fallen nun die Systeme bei der Drehung auf einander, so ist diese Lage als ein besonderer Fall der allgemeinen perspectivischen zu betrachten. — Zwei concentrische und collineare Strahlenbündel heissen gleichfalls perspectivisch, wenn sie einen Strahlenbüschel und einen Ebenenbüschel entsprechend gemein haben.

Wollen wir zwei in einer Ebene liegende Systeme perspectivisch auf einander beziehen, so können wir die Axe u und das Centrum S der Collineation willkürlich annehmen (Fig. 4), und sodann noch irgend zwei Punkte D und D_1 , welche auf einem Strahle von S liegen, einander als entsprechende zuweisen. Denn wenn die Strahlenbüschel D und D_1 perspectivisch auf das gerade Gebilde u bezogen werden, so können und müssen die beiden Systeme collinear so auf einander bezogen werden, dass der Büschel D des einen dem Büschel D_1 des andern, und dass der Büschel S sich selbst entspricht; dadurch ist ihre collineare Verwandtschaft völlig und eindeutig bestimmt (pag. 6). Weil aber in jedem Punkte A von u zwei einander entsprechende Strahlen l und l_1 von resp. D und D_1 sich schneiden, und weil durch A auch ein sich selbst entsprechender Strahl a des Büschels S hindurchgeht, so muss A oder $l \cdot a$ sich selbst, nämlich dem Punkte $l_1 \cdot a$ entsprechen, und die beiden Systeme haben folglich jeden Punkt von u gemein, wie verlangt wurde.

Jeder durch D gehende Strahl wird von seinem durch D_1 gehenden entsprechenden Strahle in einem Punkte von u geschnitten, kann also leicht construirt werden; und da je zwei homologe Punkte E und E_1 auf homologen Strahlen von D und D_1 und zugleich mit S in einer Geraden liegen, so ist zu E leicht der zugehörige Punkt E_1 zu finden. Es wird eine sehr nützliche und lehrreiche Uebung für Sie sein, wenn Sie auf diese Weise zu irgend einer gegebenen Curve die entsprechende construiren, d. h. zu beliebig vielen Punkten der ersteren die entsprechenden Punkte der letzteren. Von Interesse ist bei dieser Construction namentlich die Frage, wo die Gerade des einen Systemes liegt, welche der unendlich fernen Geraden des andern entspricht; denn von der Lage jener Geraden hängt es wesentlich ab, ob und mit wie

vielen Zweigen die gesuchte Curve in's Unendliche verläuft. Jene Gerade muss zu der Collineationsaxe parallel sein, weil sie ihre entsprechende Gerade auf der Collineationsaxe und zugleich in einem unendlich fernen Punkte schneidet. — Rückt die Axe der Collineation in's Unendliche, so werden je zwei homologe Gerade parallel, und die Systeme heissen alsdann perspectivisch ähnlich. Die Lehre von der Aehnlichkeit ebener Figuren ist Ihnen aus der Geometrie der Alten längst bekannt, und also ein besonderer Fall der Lehre von der Collineation.

Vierter Vortrag.

Collineare und reciproke Verwandtschaft räumlicher Systeme.

Die bisherigen Entwicklungen bieten uns nunmehr die Mittel dar, zwei räumliche Systeme, d. h. den unendlichen Raum doppelt gedacht, oder auch Theile des unendlichen Raumes, in einfacher Weise collinear oder reciprok auf einander zu beziehen. Aus der allgemeinen Definition der collinearen und der reciproken Verwandtschaft leiten wir zunächst für räumliche Systeme folgende Erklärungen ab:

Zwei räumliche Systeme Σ und Σ_1 sind collinear verwandt, wenn jedem Punkte P von Σ ein Punkt P_1 von Σ_1 entspricht, jeder durch P gehenden Geraden oder Ebene von Σ aber eine durch P_1 gehende Gerade resp. Ebene von Σ_1 .

Zwei räumliche Systeme Σ und Σ_1 sind reciprok verwandt, wenn jedem Punkte P von Σ eine Ebene π_1 von Σ_1 entspricht, jeder durch P gehenden Geraden oder Ebene von Σ aber ein in π_1 liegender Strahl resp. Punkt von Σ_1 .

Auch an diesem besonderen Fall werden Sie ohne Mühe den schon früher allgemein bewiesenen Satz bestätigt finden, dass zwei Grundgebilde, welche einem dritten entweder beide collinear oder beide reciprok sind, zu einander collinear sein müssen. Da hiernach die collineare Verwandtschaft aus der reciproken abgeleitet

werden kann, so darf ich mich meistens auf die Untersuchung der letzteren beschränken.

Entsprechen einander in zwei reciproken räumlichen Systemen ein Punkt P und eine Ebene π_1 , also auch der Strahlenbündel F und das ebene System π_1 , so sind die letzteren offenbar einander reciprok, weil jeder Ebene ε von P ein Punkt E_1 in π_1 , und jedem in ε liegenden Strahl von P ein durch E_1 gehender Strahl von π_1 entspricht (pag. 3). Je vier harmonischen Elementen von P oder überhaupt des einen räumlichen Systems entsprechen daher stets vier harmonische Elemente in π_1 oder im anderen System. Folglich muss auch jedem geraden Gebilde des einen Systems ein zu ihm projectivischer Ebenenbüschel des anderen, jedem Strahlenbüschel ein projectivischer Strahlenbüschel entsprechen u. s. w.. In zwei collinearen räumlichen Systemen entspricht ebenso jedem ebenen Systeme ein collineares ebenes System, jedem Strahlenbündel ein collinearer Strahlenbündel, jedem geraden Gebilde ein projectivisches gerades Gebilde u. s. w. Zwei collineare und ebenso zwei reciproke räumliche Systeme werden deshalb auch projectivisch genannt. Es folgt:

Wenn zwei collineare oder reciproke räumliche Systeme drei Elemente eines einförmigen Grundgebildes, oder auch vier gleichartige Elemente eines Grundgebildes der zweiten Stufe entsprechend gemein haben, so haben sie jedes Element dieses Grundgebildes entsprechend gemein (pag. 13).

Dabei wird vorausgesetzt, dass im letzteren Falle keine drei von jenen vier Elementen einem und demselben einförmigen Grundgebilde angehören.

Um nun zwei räumliche Systeme Σ und Σ_1 reciprok auf einander zu beziehen, verfahren wir wohl am Einfachsten und Anschaulichsten wie folgt. Wir nehmen in Σ irgend zwei Strahlenbündel A und B an, und beziehen dieselben auf je ein in Σ_1 liegendes ebenes System α_1 resp. β_1 reciprok, so jedoch, dass der Geraden AB die Schnittlinie $\alpha_1 \beta_1$ entspricht, sowie jeder durch AB gehenden gemeinschaftlichen Ebene der Bündel ein auf $\alpha_1 \beta_1$ liegender gemeinschaftlicher Punkt der ebenen Systeme. Damit ist dann jedem Punkte P von Σ eine Ebene π_1 in Σ_1 zugewiesen, und jedem durch P gehenden Strahle l ein in π_1 liegender Strahl l_1 . Denn den Strahlen AP und BP , welche mit AB in einer und derselben Ebene liegen, entsprechen in α_1 und β_1 zwei Strahlen, welche mit $\alpha_1 \beta_1$ einen und denselben Punkt gemein haben und daher eine dem Punkte P entsprechende Ebene π_1 bestimmen;

und ebenso entspricht dem Strahle l von Σ , welcher aus A und B durch zwei Ebenen $\overline{Al}$ und $\overline{Bl}$ projicirt wird, ein Strahl l_1 , welcher von α_1 und β_1 in den entsprechenden zwei Punkten $\alpha_1 l_1$ und $\beta_1 l_1$ geschnitten wird. Ist endlich in Σ irgend ein ebenes System ε gegeben, durch welches die Bündel A und B perspectivisch auf einander bezogen werden, so dass sie also den Ebenenbüschel AB entsprechend gemein haben, so werden dadurch gleichzeitig die ebenen Systeme α_1 und β_1 (weil $\alpha_1 \propto A \propto B \propto \beta_1$) collinear auf einander bezogen, so dass sie das gerade Gebilde $\alpha_1 \beta_1$ entsprechend gemein haben. Folglich liegen (nach pag. 15) α_1 und β_1 perspectivisch und erzeugen einen Strahlenbündel E_1 , welcher dem ebenen Systeme ε entspricht und demselben reciprok ist. Der Ebene ε von Σ , welche durch irgend eine Gerade l oder einen Punkt P hindurchgeht, entspricht somit ein Punkt E_1 , welcher auf der entsprechenden Geraden l_1 oder Ebene π_1 liegt. Auch der unendlich fernen Ebene des einen Systems entspricht auf diese Weise ein Punkt des andern, und zwar im Allgemeinen ein eigentlicher Punkt. Also:

„Zwei räumliche Systeme Σ und Σ_1 lassen sich stets auf eine „einzige Art so auf einander beziehen, dass zwei Strahlenbündeln A und B von Σ zwei denselben reciproke ebene Systeme α_1 und β_1 von Σ_1 entsprechen, wenn nämlich die reciproke Verwandtschaft zwischen A und α_1 und zwischen B und β_1 so festgestellt ist, dass jeder gemeinschaftlichen Ebene „von A und B ein gemeinschaftlicher Punkt von α_1 und β_1 „entspricht.“

Wir können daraus schliessen:

Sollen zwei räumliche Systeme Σ und Σ_1 reciprok auf einander bezogen werden, so darf man fünf beliebigen Punkten A, B, C, D, E des einen Σ , von denen jedoch keine vier in einer Ebene liegen, irgend fünf Ebenen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1$ des andern Systems Σ_1 , von denen keine vier durch einen Punkt gehen, als entsprechende zuweisen, wodurch dann aber jedem Element von Σ ein solches in Σ_1 zugewiesen ist.

Wir müssen nämlich und können auch auf eine einzige Art den Strahlenbündel A reciprok auf das ebene System α_1 beziehen, so dass den Strahlen $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}$ die resp. Strahlen $\alpha_1 \beta_1, \alpha_1 \gamma_1, \alpha_1 \delta_1, \alpha_1 \varepsilon_1$ entsprechen (pag. 7); und ebenso ist zwischen dem Bündel B und dem ebenen System β_1 nur eine einzige reciproke Verwandtschaft möglich, so dass die vier Strahlenpaare $\overline{BA}$ und

$\overline{\beta_1 \alpha_1}$, $\overline{BC}$ und $\overline{\beta_1 \gamma_1}$, $\overline{BD}$ und $\overline{\beta_1 \delta_1}$, $\overline{BE}$ und $\overline{\beta_1 \varepsilon_1}$ entsprechende Strahlen sind. Weil nun den gemeinschaftlichen drei Ebenen $\overline{ABC}$, $\overline{ABD}$ und $\overline{ABE}$ der Bündel A und B die resp. drei gemeinschaftlichen Punkte $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$, $\alpha_1 \beta_1 \delta_1$ und $\alpha_1 \beta_1 \varepsilon_1$ der ebenen Systeme α_1 und β_1 entsprechen, so entspricht jeder Ebene des Büschels $\overline{AB}$ ein einziger Punkt des geraden Gebildes $\overline{\alpha_1 \beta_1}$; der Satz ist also auf den vorhergehenden zurückgeführt.

Für collineare räumliche Systeme folgt ebenso:

Sollen zwei räumliche Systeme Σ und Σ_1 collinear auf einander bezogen werden, so darf man fünf beliebigen Punkten des einen, von denen keine vier in einer Ebene liegen, irgend fünf solche Punkte des andern als entsprechende zuweisen, wodurch dann jedem Elemente von Σ ein solches von Σ_1 zugewiesen ist.

Dieser Satz lässt sich entweder direkt beweisen auf analoge Weise, wie vorhin derjenige über reciproke Systeme, oder einfacher noch auf diesen zurückführen durch die Bemerkung, dass zwei Systeme, welche einem dritten reciprok sind, einander collinear sein müssen. Wir können nämlich beide gegebene Systeme auf ein drittes reciprok beziehen, so dass beliebigen fünf Ebenen des letzteren die resp. fünf gegebenen Punkte von jedem der ersteren entsprechen, so ist die collineare Verwandtschaft zwischen den gegebenen Systemen hergestellt. Statt der fünf Punkte in jedem der beiden Systeme könnten auch je fünf Ebenen, von denen keine vier durch einen Punkt gehen, einander zugewiesen werden; auch in diesem Falle gilt der Satz. Zugleich ergibt sich:

Wenn zwei collineare räumliche Systeme fünf Punkte, von denen keine vier in einer Ebene liegen, oder auch fünf Ebenen, von denen keine vier durch einen Punkt gehen, entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein, oder sind identisch.

Als Hauptergebniss dieser ganzen Untersuchung ist der jetzt geführte Beweis des Reciprocitäts-Gesetzes zu betrachten. Wenn nämlich zwei Räume reciprok auf einander bezogen werden können, so kann auch zu jedem beliebigen räumlichen Gebilde ein reciprokes construirt werden, dessen Eigenschaften sich aus denjenigen des ersteren ergeben. Ich werde desshalb künftig mich begnügen, von je zwei reciproken Sätzen immer nur den einen zu beweisen, empfehle Ihnen jedoch, auch den Beweis des andern manchmal direkt zu führen statt mittelst des Reciprocitäts-Gesetzes.

Zwischen räumlichen Gebilden, z. B. Curven oder Flächen, welche in collinearen oder reciproken Systemen einander ent-

sprechen, bestehen bemerkenswerthe Beziehungen. Dieselben sind namentlich von Interesse bei doppelt gekrümmten oder gewundenen Curven, d. h. bei solchen, von denen kein Stück in einer Ebene liegt. Ehe ich jene Beziehungen nenne, schicke ich über die gewundenen Curven einige Bemerkungen voraus.

Werden irgend zwei Punkte P und Q einer doppelt gekrümmten Curve durch eine Gerade PQ verbunden, und gleitet sodann der eine Q dieser Punkte auf der Curve fort, so beschreibt die Gerade PQ eine Kegelfläche, deren Mittelpunkt P ist, und welche aus diesem Punkte die Curve projecirt. Nähert sich Q mehr und mehr dem festen Punkte P , so nähert sich PQ einer festen Geraden p , mit der sie schliesslich zusammenfällt, wenn Q mit P sich vereinigt. Diese Gerade p heisst die Tangente der Curve im Punkte P ; und von jeder durch p gehenden Ebene wird gesagt, sie berühre die Curve im Punkte P . Wird eine solche Berührungsebene durch die Tangente p und einen beliebigen Punkt R der Curve gelegt, so beschreibt dieselbe einen die Curve projecirenden Ebenenbüschel p , wenn R sich auf der Curve fortbewegt; und nähert sich R mehr und mehr dem Punkte P , so nähert sich die Ebene pR einer festen Ebene π , mit der sie schliesslich zusammenfällt, wenn R sich mit P vereinigt. Diese Ebene π heisst die Schmiegungs- oder Krümmungs-Ebene der Curve im Punkte P . Jede Tangente kann somit aufgefasst werden als Verbindungslinie von zwei, und jede Schmiegungs-Ebene als Verbindungsebene von drei Punkten der Curve, die einander unbegrenzt sich genähert haben. Umgekehrt fällt die gemeinschaftliche Gerade von zwei sich unbegrenzt einander nähernden Schmiegungs-Ebenen einer Curve mit einer Tangente derselben zusammen, der Schnittpunkt von drei solchen Ebenen aber mit einem Punkte der Curve. Die sämtlichen Tangenten einer gewundenen Curve bilden einen räumlichen Strahlenbüschel, welcher die Curve einhüllt, und die sämtlichen Schmiegungs-Ebenen einen Ebenenbüschel, welcher der Curve sich anschmiegt.

Sind nun k und k_1 zwei gewundene Curven, welche in collinearen Systemen einander entsprechen, so muss jeder Geraden, welche zwei, und jeder Ebene, welche drei Punkte von k verbindet, eine Gerade resp. eine Ebene entsprechen, welche die homologen zwei resp. drei Punkte von k_1 verbindet. Der Tangente und der Schmiegungs-Ebene eines beliebigen Punktes von k entspricht daher auch die Tangente resp. Schmiegungs-Ebene des homologen

Punktes von k_1 . Beschreibt ein Punkt P die Curve k , während zugleich seine Tangente p den einhüllenden Strahlenbüschel von k und seine Schmiegungeebene π den Ebenenbüschel beschreibt, welcher der Curve k sich anschmiegt, so durchläuft gleichzeitig der entsprechende Punkt P_1 die Curve k_1 , die entsprechende Tangente p_1 beschreibt den einhüllenden Strahlenbüschel von k_1 und die entsprechende Schmiegungeebene π_1 den Ebenenbüschel, welcher der Curve k_1 sich anschmiegt. Endlich ist noch zu bemerken, dass jeder Ebene, von welcher k in n Punkten geschnitten wird, eine Ebene entspricht von welcher k_1 in den homologen n Punkten geschnitten wird; und gehen durch einen Punkt n Tangenten oder n Schmiegungeebenen von k , so gehen durch den entsprechenden Punkt n Tangenten resp. Schmiegungeebenen von k_1 . Uebrigens entsprechen den unendlich fernen Punkten von k im Allgemeinen eigentliche Punkte von k_1 , weil nur in besonderen Fällen der unendlich fernen Ebene des einen Systems die unendlich ferne Ebene des andern entspricht. gh

Wenn die Curve k nach einem beliebigen Gesetze sich stetig bewegt, und eine Fläche Φ beschreibt, so beschreibt gleichzeitig k_1 eine Fläche Φ_1 , welche jener entspricht. Diese Flächen werden von je zwei einander entsprechenden Schnittebenen in collinearen Curven geschnitten; und wenn Φ von irgend einer Geraden in einer beliebigen Anzahl von Punkten geschnitten oder berührt wird, so wird Φ_1 von der entsprechenden Geraden in ebenso vielen Punkten geschnitten resp. berührt. Auch entspricht jeder Berührungsebene von Φ eine Berührungsebene von Φ_1 . Enthält die eine Fläche gerade Linien, so enthält die andere ebenso viele gerade Linien; hat die eine Fläche eine Doppelcurve, durch welche sie mehr als einmal hindurchgeht, so gilt dasselbe von der anderen; u. s. w. Dagegen können collineare Flächen sich wesentlich unterscheiden hinsichtlich ihrer unendlich fernen Punkte. So kann die eine Fläche von der unendlich fernen Ebene in einer Curve geschnitten werden, während die andere von der unendlich fernen Ebene in einem Punkte berührt oder auch gar nicht getroffen wird; denn nur in besonderen Fällen entsprechen in collinearen räumlichen Systemen einander die unendlich fernen Ebenen. * nicht definiert!

Sind zwei räumliche Systeme reciprok auf einander bezogen, so entspricht ebenfalls jeder gewundenen Curve k des einen eine gewundene Curve k_1 des andern; jedoch so: Jedem Punkte P von k entspricht eine Schmiegungeebene π_1 von k_1 , jeder Tangente,

welche zwei, und jeder Schmiegungeebene, welche drei einander unbegrenzt sich nähernde Punkte von k verbindet, entspricht eine Tangente von k_1 , in welcher zwei, resp. ein Punkt, in welchen drei einander unbegrenzt sich nähernde Schmiegungeebenen von k_1 sich schneiden. Jeder Ebene, welche von der einen Curve n Punkte oder n Tangenten enthält, entspricht ein Punkt, durch welchen n Schmiegungeebenen resp. n Tangenten der anderen Curve hindurchgehen. Den sämtlichen Punkten einer ebenen Curve nebst deren Tangenten entsprechen die sämtlichen Berührungsebenen einer Kegelfläche nebst deren Seitenlinien. Den Punkten und Tangenten einer Fläche Φ entsprechen die Berührungsebenen und Tangenten einer Fläche Φ_1 , und den Berührungsebenen von Φ entsprechen die Punkte von Φ_1 u. s. w.

Ich glaube mich vorerst auf diese wenigen Bemerkungen beschränken zu dürfen, zumal da ich später auf diese Beziehungen noch durch Beispiele zurückkommen werde. Dagegen muss ich Sie noch auf einen besonderen Fall aufmerksam machen, welcher eintreten kann, wenn zwei räumliche Systeme collinear auf einander bezogen sind. Da zwei solche Räume einander stets durchdringen, so können auch homologe Elemente derselben zusammenfallen, oder mit anderen Worten die Systeme können einzelne Elemente, und sogar Grundgebilde der ersten oder der zweiten Stufe entsprechend gemein haben. Analoge Betrachtungen, wie die früheren über collineare Systeme, die in derselben Ebene liegen, führen uns zu folgendem Satze:

Wenn zwei collineare räumliche Systeme ein ebenes System Σ entsprechend gemein haben, so haben sie auch einen Strahlenbündel S entsprechend gemein; und umgekehrt.

Nämlich je zwei einander entsprechende ebene Systeme α und α_1 der collinearen Räume sind ebenfalls collinear (pag. 19); sie schneiden sich in einer Geraden, welche in Σ liegt, und haben jeden Punkt dieser ihrer Schnittlinie entsprechend gemein, weil jedes Element von Σ mit seinem entsprechenden zusammenfällt; sie sind folglich perspectivisch, und Schnitte eines Strahlenbündels S . Weil nun jedes Element von S , sei es ein Strahl oder eine Ebene, ein sich selbst entsprechendes Element von Σ mit zwei einander entsprechenden Elementen von α und α_1 verbindet, so muss es sich selbst entsprechen; so dass je zwei einander entsprechende Punkte der räumlichen Systeme mit S in einer Geraden, und je zwei homologe Gerade mit S in einer Ebene liegen,

die letzteren aber ausserdem in einem Punkte von Σ einander schneiden. — Haben anderseits die räumlichen Systeme einen Strahlenbündel S entsprechend gemein, so liegen je zwei homologe Strahlenbündel A und A_1 perspectivisch. Denn weil der Strahl AA_1 durch S geht, so haben diese collinearen Bündel nicht nur diesen Strahl, sondern auch jede durch ihn gehende Ebene entsprechend gemein, und sind daher Scheine eines ebenen Systemes Σ . In jedem Element von Σ aber wird ein Element von S , welches sich selbst entspricht, geschnitten von zwei einander entsprechenden Elementen der Bündel A und A_1 ; folglich fallen alle Elemente von Σ mit ihren entsprechenden zusammen.

Zwei collineare räumliche Systeme, welche einen Strahlenbündel S (und ein ebenes System Σ) entsprechend gemein haben, werden perspectivisch genannt. Der Punkt S , welcher mit je zwei homologen Punkten in einer Geraden und mit je zwei homologen Strahlen der Systeme in einer Ebene liegt, heisst das Collineations-Centrum, und die Ebene Σ , auf welcher je zwei homologe Strahlen oder Ebenen sich schneiden, die Collineations-Ebene der räumlichen Systeme. Sollen zwei räumliche Systeme perspectivisch auf einander bezogen werden, so kann man die Ebene Σ und das Centrum S der Collineation willkürlich annehmen, und ausserdem irgend zwei Punkte A und A_1 einander als entsprechende zuweisen, welche auf einem und demselben Strahle von S und ausserhalb Σ liegen. Denn seien B, C, D drei Punkte von Σ , von deren drei Verbindungslinien keine die Gerade $SA A_1$ schneidet, so können die räumlichen Systeme collinear so auf einander bezogen werden, dass den fünf Punkten A, B, C, D, S des einen die resp. fünf Punkte A_1, B, C, D, S des andern entsprechen. Die Strahlen $SA A_1, SB, SC, SD$ und folglich alle Elemente des Bündels S entsprechen sich selbst; ebenso entspricht die Ebene BCD oder Σ sich selbst, sowie jedes Element derselben, weil ausser den Punkten B, C, D noch ein auf $SA A_1$ liegender Punkt von Σ sich selbst entspricht (pag. 13).

In perspectivischen räumlichen Systemen kann mit grosser Leichtigkeit zu jedem Gebilde das entsprechende construirt werden auf dieselbe Art, wie ich es bei perspectivischen Systemen, die in einer Ebene liegen, gezeigt habe. Ein besonderer Fall, der hier eintreten kann, ist derjenige, in welchem die Collineations-Ebene unendlich fern liegt, so dass je zwei homologe Gerade oder Ebenen einander parallel sind. In diesem Falle werden die Sy-

Handwritten notes:
~~Handwritten~~
 2
 koll. Par
 in Str
 entspr
 gemein
 no bech
 in eben
 Feld ent
 gemein

Handwritten note:
 von selbst

steme auch wohl perspectivisch ähnlich genannt. Die Stereometrie wird Sie bereits mit solchen ähnlichen Systemen bekannt gemacht haben; eine Maschine z. B. und ein getreues Modell derselben können als Theile ähnlicher Systeme angesehen, und in die perspectivische Lage gebracht werden, so dass die Verbindungslinien von je zwei homologen Punkten sich in einem festen Punkte, dem Collineations-Centrum schneiden, je zwei homologe Strahlen oder Ebenen aber parallel sind.

Fünfter Vortrag.

Flächen zweiter Ordnung, deren Erzeugung und Classificirung.

Wie wir durch projectivische einförmige Grundgebilde zu den Elementargebilden zweiter Ordnung geführt worden sind, ebenso führen uns die projectivischen Grundgebilde zweiter Stufe zu den Flächen und Ebenenbündeln zweiter Ordnung. Nämlich:

Eine Fläche zweiter Ordnung wird erzeugt durch zwei reciproke Strahlenbündel, welche nicht concentrisch liegen, indem jeder Strahl des einen Bündels von der ihm entsprechenden Ebene des andern in einem Punkte der Fläche geschnitten wird.

Ein Ebenenbündel zweiter Ordnung wird erzeugt durch zwei reciproke ebene Systeme, welche nicht in derselben Ebene liegen, indem jeder Strahl des einen Systemes aus dem ihm entsprechenden Punkte des andern durch eine Ebene des Bündels projicirt wird.

Da die Fläche II. Ordnung und der Ebenenbündel II. Ordnung einander reciprok sind, so ergeben sich mittelst des Gesetzes der Reciprocität alle Eigenschaften des einen dieser beiden Gebilde sofort aus denjenigen des andern, und wir dürfen uns daher auf die Untersuchung der Fläche II. Ordnung beschränken. Später wird sich herausstellen, dass der Ebenenbündel II. Ordnung aus den sämtlichen Berührungsebenen einer Fläche II. Ordnung besteht; so dass auch abgesehen vom Reciprocitäts-Gesetze die Theorie der Ebenenbündel II. Ordnung in derjenigen der Flächen II. Ordnung enthalten ist.

Seien S und S_1 die Mittelpunkte der beiden reciproken Strahlenbündel, durch welche eine Fläche Φ II. Ordnung erzeugt wird, dann lässt sich zunächst leicht erkennen, dass jede durch S gelegte Ebene α von der Fläche in einer Curve II. Ordnung geschnitten wird; und zwar enthält diese Curve den Punkt S sowie denjenigen Punkt, in welchem die Ebene α von dem ihr entsprechenden Strahle a_1 des Bündels S_1 geschnitten wird, und kann in besonderen Fällen in ein System von zwei Geraden zerfallen. Nämlich demjenigen Strahlenbüschel von S , welcher in der Ebene α liegt, entspricht ein ihm projectivischer Ebenenbüschel von S_1 , dessen Axe die Gerade a_1 ist. Diese projectivischen Büschel aber erzeugen (I. Abth. pag. 96) die Curve II. Ordnung, welche die Ebene α mit der Fläche Φ gemein hat, und welche nur dann in zwei gerade Linien zerfällt, wenn irgend ein Strahl des Büschels α in der ihm entsprechenden Ebene von a_1 liegt. Denn die Curve II. Ordnung wird auch erzeugt durch die beiden projectivischen Strahlenbüschel, von welchen der eine der vorhin genannte Strahlenbüschel S in α , der andere aber ein Schnitt des Ebenenbüschels a_1 mit der Ebene α ist, und welche nur in jenem besonderen Fall perspectivische Lage haben. Hieraus ersehen Sie, dass die Schnittcurve von Φ und α auch durch die Punkte S und $a_1\alpha$ hindurchgeht. — Ebenso wird die Fläche II. Ordnung von jeder durch S_1 gehenden Ebene in einer Curve II. Ordnung geschnitten, welche auch den Punkt S_1 enthält.

Es folgt hieraus, dass die Fläche zweiter Ordnung mit keiner Geraden g , die nicht ganz in sie hineinfällt, mehr als zwei Punkte gemein haben kann; denn die Curve II. Ordnung, in welcher die Fläche von der Ebene $\overline{Sg}$ geschnitten wird, kann mit der Geraden g höchstens zwei Punkte gemein haben. Daraus erklärt sich auch der Name „Fläche zweiter Ordnung“. Jede durch S gehende Gerade g hat mit der Fläche im Allgemeinen noch einen zweiten von S verschiedenen Punkt gemein, in welchem sie nämlich von der ihr entsprechenden Ebene γ_1 geschnitten wird; und nur dann fällt dieser zweite Schnittpunkt mit S zusammen, wenn γ_1 durch den gemeinschaftlichen Strahl $\overline{S_1 S}$ der Bündel hindurchgeht. Wir wollen jeden Strahl von S , welcher mit der Fläche II. Ordnung keinen zweiten, von S verschiedenen Punkt gemein hat, eine Tangente der Fläche im Punkte S nennen. Da jeder Tangente eine durch $\overline{SS_1}$ gelegte Ebene entspricht, so liegen alle durch S gehenden Tangenten der Fläche in derjenigen Ebene des

Bündels S , welche dem gemeinschaftlichen Strahle $\overline{SS_1}$ entspricht; und diese Ebene soll die Berührungs-Ebene der Fläche II. Ordnung im Punkte S genannt werden. Also:

„Dem gemeinschaftlichen Strahle $\overline{SS_1}$ der Bündel entspricht „sowohl in S als auch in S_1 eine Berührungsebene der Fläche „II. Ordnung.“

Sind nun auch in anderen Punkten der Fläche solche Berührungsebenen möglich? und hat die Fläche auch mit solchen Schnittebenen, die nicht durch S oder S_1 gehen, Curven II. Ordnung gemein? Diese Fragen drängen sich uns jetzt auf, und Sie werden gewiss geneigt sein, die letztere Frage zu bejahen, wenn Sie berücksichtigen, dass keine ebene Schnittcurve der Fläche von einer Geraden in mehr als zwei Punkten getroffen werden kann. Auch wissen wir bereits, dass durch jeden Punkt P einer Fläche II. Ordnung mindestens zwei Schaaren von Kegelschnitten, die auf der Fläche liegen, hindurchgehen müssen; denn jede Ebene der beiden Ebenenbüschel, deren Axen den Punkt P mit den Mittelpunkten S und S_1 der reciproken Strahlenbündel verbinden, hat einen Kegelschnitt mit der Fläche II. Ordnung gemein. Wir finden wirklich eine bejahende Antwort für die aufgeworfenen Fragen, indem wir zeigen:

„Jeder beliebige Punkt einer gegebenen Fläche II. Ordnung kann „zum Mittelpunkt des einen von zwei reciproken Strahlenbündeln „gewählt werden, welche die Fläche erzeugen.“

Seien S und S_1 die Mittelpunkte derjenigen reciproken Strahlenbündel, durch welche die gegebene Fläche II. Ordnung Φ ursprünglich erzeugt worden ist, und sei S_2 ein beliebiger dritter Punkt von Φ ; dann gilt es, die Strahlenbündel S und S_2 in solcher Weise reciprok auf einander zu beziehen, dass auch sie die Fläche Φ erzeugen. Werden die Bündel S und S_2 in ganz beliebiger Weise reciprok auf einander bezogen, so erzeugen sie eine zweite Fläche Φ_1 II. Ordnung, welche durch die Punkte S und S_2 hindurchgeht. Ich werde nun die reciproke Verwandtschaft zwischen S und S_2 so herstellen, dass Φ_1 noch zwei Kegelschnitte mit Φ gemein hat, welche durch S , nicht aber durch S_2 gehen; und sodann werde ich nachweisen, dass Φ und Φ_1 mit allen ihren Punkten zusammenfallen, also identisch sind.

Die gegebene Fläche Φ schneide ich durch zwei Ebenen, welche den Punkt S , nicht aber S_2 enthalten, in zwei Kegelschnitten α und λ (Fig. 5). Sei T der Punkt, in welchem die Schnittlinie

der beiden Ebenen zum zweiten Male von der Fläche Φ getroffen wird, sei also $\overline{ST}$ die gemeinschaftliche Sehne der Kegelschnitte α und λ , welche auch zu einer gemeinschaftlichen Tangente werden kann, wenn T sich dem Punkte S unbegrenzt nähert. Damit dann zunächst T auf der von den Bündeln S und S_2 erzeugten Fläche Φ_1 liege, muss dem Strahle $\overline{ST}$ von S eine beliebige durch T gehende Ebene $\overline{S_2 KL}$ von S_2 entsprechen. Diese Ebene schneide den Kegelschnitt α zum zweiten Male in einem Punkte K und ebenso λ in einem Punkte L ; dann können wir die verlangte reciproke Verwandtschaft zwischen den Strahlenbündeln S und S_2 folgendermassen feststellen. Wir projeciren die Curve II. Ordnung α aus dem Punkte S durch einen Strahlenbüschel $S\alpha$ und aus der Axe $\overline{S_2 K}$ durch einen Ebenenbüschel; dadurch ist der letztere projectivisch auf den ersteren bezogen. Ebenso projeciren wir die Curve λ aus S durch einen Strahlenbüschel $S\lambda$ und aus $\overline{S_2 L}$ durch einen Ebenenbüschel, welcher letztere dann zu jenem Strahlenbüschel projectivisch ist. Da nun dem gemeinschaftlichen Elemente $\overline{S_2 KL}$ der Ebenenbüschel, durch welches der Punkt T beider Kegelschnitte projecirt wird, der gemeinschaftliche Strahl $\overline{ST}$ der beiden Strahlenbüschel entspricht, so sind hiedurch (nach pag. 6) die Strahlenbündel S und S_2 reciprok auf einander bezogen. Und die Fläche Φ_1 , welche durch diese Bündel erzeugt wird, geht nicht nur durch S und S_2 , sondern auch durch den Kegelschnitt α , weil dieser durch den Strahlenbüschel $S\alpha$ und den ihm entsprechenden Ebenenbüschel $\overline{S_2 K}$ erzeugt wird, und ebenso durch den Kegelschnitt λ . — Beiläufig folgt aus dieser Construction:

„Durch zwei gegebene Kegelschnitte α und λ , welche in verschiedenen Ebenen liegen, aber einander entweder in zwei Punkten S und T schneiden oder in einem Punkte S berühren, und durch einen ausserhalb ihrer Ebenen liegenden Punkt S_2 kann eine Fläche II. Ordnung gelegt werden.“

Mehr als eine solche Fläche II. Ordnung ist nicht möglich; denn zwei Flächen wie Φ und Φ_1 , welche beide den Bedingungen genügen, sind identisch, wie aus Folgendem sich ergibt. Zunächst schneidet jede durch S_1 und S_2 gelegte Ebene, welche von α und λ je zwei Punkte enthält, die Flächen in zwei Kegelschnitten, welche mit allen ihren Punkten zusammenfallen, weil sie ausser S_2 noch jene vier, auf α und λ liegenden Punkte gemein haben (I. Abth. pag. 64); solche Schnittebenen sind aber stets möglich,

wenn nur α und λ von vornherein passend auf der Fläche Φ gewählt werden. Sei nun μ ein solcher durch S_1 und S_2 gehender Kegelschnitt, welcher also beiden Flächen II. Ordnung angehört, aber nicht durch den Punkt S gehen möge; sei ferner P ein beliebiger Punkt der einen Fläche. Dann schneidet die Ebene $\overline{SPS_1}$ (und ebenso $\overline{SPS_2}$) die beiden Flächen II. Ordnung in zwei Kegelschnitten, welche ausser S und S_1 (resp. S und S_2) noch drei Punkte mit einander gemein haben, nämlich noch je einen Punkt der Kegelschnitte α , λ und μ . Da folglich diese beiden Kegelschnitte zusammenfallen, so liegt jeder Punkt P der einen Fläche auch auf der andern; w. z. b. w.

Es folgt, dass auch in S_2 eine Berührungs-Ebene zur Fläche Φ vorhanden ist, und dass jede andere durch S_2 gelegte Ebene mit Φ einen Kegelschnitt gemein hat, der unter Umständen auch in ein System von zwei Geraden ausarten kann. Da nun S_2 ein ganz beliebiger Punkt der Fläche Φ ist, so haben wir folgende Haupt-Eigenschaft der Flächen II. Ordnung bewiesen:

Eine Fläche II. Ordnung kann mit einer beliebigen Ebene nur einen Kegelschnitt gemein haben, welcher auch in zwei Gerade zerfallen kann. In jedem ihrer Punkte wird die Fläche von einer Ebene berührt, welche alle in diesem Punkte möglichen Tangenten der Fläche enthält.

Noch auf einen Umstand mache ich Sie aufmerksam. Um zu zeigen, dass durch α , λ und S_2 eine Fläche II. Ordnung gelegt werden könne, haben wir die Strahlenbündel S und S_2 reciprok auf einander bezogen, und zwar wiesen wir zunächst dem Strahle $\overline{ST}$ eine ganz beliebige durch T gehende Ebene $\overline{S_2KL}$ zu. Wir können folglich durch Aenderung dieser Ebene auf unzählig verschiedene Arten die Bündel S und S_2 auf einander reciprok beziehen, so dass sie die verlangte Fläche erzeugen; oder:

„Zwei Strahlenbündel, deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Fläche II. Ordnung liegen, können auf unendlich viele Arten reciprok so auf einander bezogen werden, dass sie die Fläche II. Ordnung erzeugen.“

Die vorhin bewiesene Haupt-Eigenschaft der Flächen II. Ordnung wollen wir zunächst zu einer Classificirung dieser Flächen benutzen. Wir unterscheiden geradlinige Flächen II. Ordnung, welche durch eine gerade Linie beschrieben werden können, und solche, in denen keine gerade Linien enthalten sind. Wenn nämlich eine Fläche II. Ordnung eine Gerade g enthält, so hat sie

mit jeder durch g hindurchgelegten Schnittebene noch eine zweite Gerade l gemein, weil dann der Kegelschnitt, in welchem sie von der Ebene getroffen wird, nothwendig in ein System von zwei Geraden ausartet; und während die Schnittebene um g sich dreht, durchläuft jene zweite Gerade l die Fläche. Die geradlinigen Flächen II. Ordnung sind nun keine anderen, als die uns bereits bekannten, d. h. Regelflächen und Kegelflächen II. Ordnung. Entweder nämlich schreitet die bewegliche Gerade l so fort, dass keine ihrer Lagen von einer früheren geschnitten wird, oder es giebt zwei Lagen l_1 und l_2 derselben, welche sich schneiden. Im letzteren Falle kann der Schnittpunkt M von l_1 und l_2 (Fig. 6) nur auf der Geraden g liegen, weil die Ebenen gl_1 und gl_2 von einander verschieden sind. Seien nun A und B irgend zwei Punkte der Fläche, welche auf keiner der Geraden g, l_1, l_2 liegen, und möge die Fläche II. Ordnung von zwei beliebigen, durch A und B gehenden Ebenen in den Kegelschnitten α und λ getroffen werden. Dann sind die beiden Kegelflächen, durch welche α und λ aus dem Punkte M projecirt werden, identisch, weil sie die fünf Strahlen MA, MB, g, l_1, l_2 gemein haben; und jeder Strahl derselben gehört der gegebenen Fläche II. Ordnung an, weil er drei Punkte derselben enthält, nämlich ausser S noch je einen Punkt der Kegelschnitte α und λ . Also in diesem Falle ist die Fläche eine Kegelfläche II. Ordnung.

Wenn anderseits keine Lage der beweglichen Geraden l von einer früheren geschnitten wird, so greifen wir drei beliebige Lagen l_1, l_2, l_3 derselben heraus. Jede vierte Gerade, welche von l_1, l_2 und l_3 geschnitten wird, gehört dann ebenfalls der Fläche II. Ordnung an, weil sie die drei Schnittpunkte mit derselben gemein hat, und die Fläche wird auch beschrieben, indem eine bewegliche Gerade an den drei Geraden l_1, l_2, l_3 hingleitet. Also ist die Fläche II. Ordnung in diesem Falle eine Regelfläche, d. h. entweder ein einfaches Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid.

Diejenigen Flächen II. Ordnung, auf welchen keine geraden Linien liegen, werden eingetheilt in Ellipsoide, elliptische Paraboloiden und zweifache Hyperboloide. Das Ellipsoid hat mit der unendlich fernen Ebene keinen Punkt gemein; das elliptische Paraboloid wird von derselben in einem Punkte berührt, das zweifache Hyperboloid dagegen in einer Curve II. Ordnung geschnitten. Besondere Fälle dieser Flächenarten erhalten

Sie durch Rotation eines Kegelschnitts um eine seiner Axen; nämlich die Ellipse beschreibt bei einer solchen Drehung ein Rotations-Ellipsoid, die Parabel ein Rotations-Paraboloid und die Hyperbel, wenn sie sich um ihre Hauptaxe dreht, ein zweifaches Rotations-Hyperboloid. Dagegen wird von der Hyperbel ein einfaches Rotations-Hyperboloid beschrieben, wenn sich dieselbe um ihre Nebenaxe dreht.

Das Ellipsoid hat zufolge seiner Definition mit jeder Schnittebene eine Ellipse gemein. Das elliptische Paraboloid wird von einer Ebene nur dann in einer Parabel geschnitten, wenn diese Ebene die Richtung enthält, in welcher der unendlich ferne Punkt des Paraboloides liegt; sonst in einer Ellipse. Ebenso haben wir gesehen (I. Abth. pag. 101), dass das hyperbolische Paraboloid mit jeder Ebene eine Hyperbel gemein hat, welche auch in zwei Gerade zerfallen kann, und ausnahmsweise nur dann eine Parabel, wenn die Ebene nach dem Berührungspunkte der unendlich fernen Ebene und des Paraboloides hinläuft. Das einfache und das zweifache Hyperboloid haben mit einer Schnittebene eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel gemein, je nachdem die Ebene keinen, oder einen Punkt, oder zwei Punkte der unendlich fernen Curve des Hyperboloides enthält; auch kann bei dem einfachen Hyperboloid die Schnittlinie in zwei Gerade zerfallen.

Ob die Fläche II. Ordnung, welche von zwei beliebigen reciproken Strahlenbündeln S und S_1 erzeugt wird, geradlinig ist oder nicht, lässt sich zum Voraus leicht daraus bestimmen, dass jede Berührungsebene einer geradlinigen Fläche II. Ordnung mit dieser eine oder zwei Gerade gemein hat. Nun entspricht dem Strahle $\overline{SS_1}$ des Bündels S die Berührungsebene im Punkte S_1 , und den sämtlichen Ebenen des Büschels $\overline{SS_1}$ entsprechen die sämtlichen Tangenten in S_1 . Wenn nun zwei Strahlen dieses Tangentenbüschels in den ihnen resp. entsprechenden Ebenen des Büschels $\overline{SS_1}$ liegen, so hat die Berührungsebene diese zwei Strahlen mit der Fläche II. Ordnung gemein, und die Fläche ist eine Regelfläche. Tritt dasselbe nur für einen Strahl ein, so haben wir eine Kegelfläche; und wenn gar kein Strahl des Tangentenbüschels in seiner entsprechenden Ebene liegt, so ist die Fläche II. Ordnung keine geradlinige. Sollte der ganz besondere Fall eintreten, dass drei und folglich alle Ebenen des Büschels $\overline{SS_1}$ durch die ihnen entsprechenden Strahlen von S_1 gehen, so zerfällt die Fläche II. Ordnung in zwei Ebenen; wie schon daraus

hervorgeht, dass alsdann jeder Kegelschnitt, welchen die Fläche mit einer beliebigen Ebene gemein hat, in zwei Gerade zerfallen muss.

Sechster Vortrag.

Polarität der Flächen zweiter Ordnung. Durchmesser, Mittelpunkt und Hauptaxen derselben.

Wie die Curven II. Ordnung, so besitzen auch die Flächen II. Ordnung gewisse Eigenschaften, welche gewöhnlich mit dem Namen Polarität bezeichnet werden. Dieselben lassen sich mittelst der Sätze des fünften Vortrages leicht ableiten. Wir wollen übrigens im Folgenden die Kegelflächen II. Ordnung ausschliessen, weil die Eigenschaften der Polarität für dieselben gleichzeitig mit denjenigen der Curven II. Ordnung bereits aufgestellt wurden (I. Abth. pag. 87).

Sei A ein beliebiger Punkt im Raume, welcher nicht auf der gegebenen Fläche II. Ordnung Φ liegen möge. Wir legen durch A beliebige Secanten an die Fläche, und bestimmen auf jeder derselben denjenigen Punkt, welcher von A durch die beiden Schnittpunkte mit der Fläche harmonisch getrennt ist. Dann müssen alle diese vierten harmonischen Punkte in einer Ebene α liegen. Denn der geometrische Ort dieses vierten harmonischen Punktes hat mit jeder Ebene, welche durch A geht und die Fläche Φ in einer Curve II. Ordnung schneidet, eine Gerade gemein, nämlich die Polare des Punktes A in Bezug auf jene Curve II. Ordnung; und da offenbar nicht alle diese Geraden, welche sich paarweise schneiden, durch einen und denselben Punkt gehen, so liegen alle in einer und derselben Ebene α . Offenbar enthält diese Ebene α auch den Berührungspunkt jeder Tangente, welche von A an eine solche Curve II. Ordnung gelegt werden kann, sowie den Schnittpunkt von je zwei Tangenten einer solchen Curve, wenn deren Berührungspunkte mit A in einer Geraden liegen (vergl. I. Abth. pag. 79). Hieraus ergibt sich, dass auch die Schnittlinie von irgend zwei Berührungsebenen der Fläche in der Ebene α enthalten ist, falls die beiden Berührungspunkte mit A

in einer Geraden liegen; denn die Tangenten, welche in diesen Berührungsebenen enthalten sind, schneiden sich paarweise in Punkten von α .

Wir wollen diese Ebene α die Polarebene oder Polare des Punktes A nennen und umgekehrt A den Pol der Ebene α . Die Polare eines beliebigen Punktes wird also durch folgende Eigenschaften der Fläche II. Ordnung bestimmt, von denen jede auch als Definition der Polare betrachtet und zur Construction derselben benutzt werden kann:

„Werden an eine Fläche II. Ordnung durch einen beliebigen Punkt A , welcher nicht auf der Fläche liegt, Secanten und Schnittebenen gelegt, und bestimmt man:

- „1) Diejenigen Punkte der Secanten, welche durch die Fläche „harmonisch von A getrennt sind,
 - „2) die Polaren von A in Bezug auf die Kegelschnitte, welche „die Fläche II. Ordnung mit den Schnittebenen gemein hat,
 - „3) die Schnittlinien von je zwei Ebenen, welche die Fläche „in zwei auf einer Secante gelegenen Punkten berühren,
 - „4) die Berührungspunkte sämtlicher Tangenten und Berührungsebenen der Fläche, welche durch A gehen,
- „so liegen alle diese Punkte und Geraden auf einer Ebene „ α , welche die Polare von A genannt wird, und von welcher „ A der Pol ist.“

Während also die Tangenten, welche durch einen auf der Fläche gegebenen Punkt an dieselbe gelegt werden können, einen Strahlenbüschel I. Ordnung bilden, so ergibt sich für einen beliebigen Punkt A , welcher nicht auf der Fläche liegt, und dessen Polare die Fläche schneidet, Folgendes:

„Die Berührungspunkte sämtlicher Tangenten und Berührungsebenen, welche aus einem beliebigen Punkte A an die Fläche II. Ordnung gelegt werden können, liegen auf einem Kegelschnitt, und folglich liegen die Tangenten selbst in einer Kegelfläche II. Ordnung, welche von den Berührungsebenen umhüllt wird.“

Der im Satze angeführte Kegelschnitt ist nämlich derjenige, welchen die Polare des Punktes A mit der Fläche II. Ordnung gemein hat. Es ist einleuchtend, dass auch umgekehrt jede Gerade, welche irgend einen Punkt P dieses Kegelschnittes mit A verbindet, im Punkte P die Fläche II. Ordnung berührt; denn schneidet sie die Fläche in noch einem zweiten Punkte Q , so würde

der Punkt, welcher von A durch P und Q harmonisch getrennt ist, ausserhalb der Polare des Punktes A liegen, weil P in derselben liegt. Jede Ebene, welche aus A eine Tangente des Kegelschnittes projicirt, ist folglich auch Berührungsebene der Fläche. Weil eine beliebige Gerade, die den Punkt A enthält, von höchstens zwei Tangenten jenes Kegelschnittes getroffen wird, so erhalten wir noch den Satz:

„Durch eine Gerade, welche nicht ganz der Fläche II. Ordnung angehört, lassen sich höchstens zwei Berührungsebenen an die Fläche legen.“

Durch eine beliebige Fläche II. Ordnung ist jedem nicht auf der Fläche gelegenen Punkte eine Polarebene zugewiesen. Wir wollen jetzt für den bisher ausgeschlossenen Grenzfall festsetzen, dass jedem Punkte, welcher auf der Fläche liegt, seine Berührungsebene als Polare entsprechen soll und dass umgekehrt jede Berührungsebene der Fläche ihren Berührungspunkt zum Pol haben soll. Dann giebt uns der folgende Satz Aufschluss darüber, in welcher Weise das Entsprechen von Punkten und Ebenen stattfindet:

Liegt von zwei Punkten A, B der erste auf der Polare des zweiten, so liegt auch der zweite auf der Polare des ersten.

Geht von zwei Ebenen die erste durch den Pol der zweiten, so geht auch die zweite durch den Pol der ersten.

Schneiden wir nämlich die Fläche II. Ordnung durch eine Ebene, welche die Punkte A und B enthält, und construiren zu jedem der beiden Punkte die Polare in Bezug auf die Schnittcurve, so geht nach der Annahme die Polare von B durch den Punkt A und folglich (I. Abth. pag. 81) die Polare von A durch den Punkt B . Die Polare von A in Bezug auf jene Schnittcurve ist aber enthalten in der Polarebene von A bezüglich der Fläche II. Ordnung, und folglich liegt B in dieser Polarebene. — Der Satz rechts ist nur eine Wiederholung des Satzes links.

Bewegt sich also ein Punkt in einer Ebene, so dreht sich gleichzeitig seine Polare um den Pol dieser Ebene; und dreht sich eine Ebene um einen Punkt, so bewegt sich ihr Pol in der Polarebene dieses Punktes. Wir schliessen daraus:

Wenn sich ein Punkt in einer Geraden, also in zwei Ebenen zugleich bewegt, so dreht sich seine Polare um eine Gerade; denn sie dreht sich gleichzeitig

Wenn sich eine Ebene um ^{eine} ~~zwei~~ Gerade, also um zwei Punkte der Geraden zugleich dreht, so bewegt sich ihr Pol in einer Geraden; denn er be-

um die Pole beider Ebenen und folglich um die Verbindungslinie dieser Pole.

wegt sich gleichzeitig in den Polaren beider Punkte und folglich in der Schnittlinie dieser Polaren.

Von zwei Geraden soll jede die Polare der andern genannt werden, wenn die Polarebene jedes Punktes der einen Geraden durch die andere hindurchgeht und umgekehrt der Pol von jeder Ebene der einen Geraden auf der andern liegt. Dann ist mittelst der Fläche II. Ordnung jeder Geraden im Raume eine andere als Polare zugewiesen. Den vorigen Doppelsatz können wir jetzt auch in folgende Worte kleiden:

Geht eine Gerade durch einen Punkt, so liegt ihre Polare in der Polar-Ebene dieses Punktes.

Liegt eine Gerade in einer Ebene, so geht ihre Polare durch den Pol dieser Ebene.

Um zu einer Geraden g die Polare g_1 zu construiren, suchen wir hiernach entweder zu zwei Punkten von g die Polaren und bestimmen deren Schnittlinie g_1 , oder wir suchen zu zwei Ebenen von g die Pole und bestimmen deren Verbindungslinie g_1 . Wenn die Gerade g von der Fläche II. Ordnung in zwei Punkten geschnitten wird, so gehen also die beiden Ebenen, welche die Fläche in den Schnittpunkten berühren, durch die Polare g_1 von g ; und wenn durch g zwei Berührungs-Ebenen an die Fläche gelegt werden können, so enthält g_1 die beiden Berührungspunkte dieser Ebenen. Ist g eine Tangente der Fläche, so wird sie von ihrer Polare im Berührungspunkte geschnitten, und liegt mit derselben in einer Berührungs-Ebene der Fläche; denn weil g in der Berührungs-Ebene liegt, so muss g_1 den Pol derselben, d. h. den Berührungspunkt enthalten, und weil g durch den letztern geht, so muss g_1 in der Polare desselben, d. h. in der Berührungs-Ebene liegen. In jedem anderen Falle können wir die Polare g_1 einer Geraden g auch wie folgt bestimmen. Wir schneiden die Fläche II. Ordnung durch Ebenen, welche die Gerade g enthalten, und suchen den Pol von g in Bezug auf jede Schnittcurve; dann liegen alle diese Pole auf der Geraden g_1 . Denn ist P ein beliebiger von diesen Polen, so geht die Polar-Ebene von P durch die Gerade g und P muss daher auf g_1 liegen. Welche reciproke Construction ergiebt sich aus der soeben genannten?

Um zu einer gegebenen Ebene den Pol zu construiren, suchen wir die Polaren von beliebig vielen Punkten und Geraden der Ebene; alle diese Polaren schneiden sich alsdann in dem gesuchten

Pole. Namentlich also gehen die Berührungs-Ebenen aller Punkte, welche die Ebene mit der Fläche II. Ordnung gemein hat, durch den gesuchten Pol; und wenn durch irgend eine Gerade der Ebene zwei Berührungs-Ebenen an die Fläche gelegt werden, so ist der Pol auch auf der Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte enthalten, und zwar ist er (zufolge pag. 34) durch die Berührungs-Ebenen von der gegebenen Ebene harmonisch getrennt.

Die Polarität der Flächen II. Ordnung führt uns zu einem besonderen Falle der reciproken Verwandtschaft im Raume. Weil nämlich durch eine Fläche II. Ordnung jedem Punkte P eine Ebene π als Polare zugeordnet ist, und jeder durch P gehenden Ebene resp. Geraden ein in π liegender Punkt als Pol resp. Strahl als Polare, so findet hier die allgemeine Definition der Reciprocität (pag. 18) sofort Anwendung. Zwei räumliche Gebilde, welche in Bezug auf eine Fläche II. Ordnung einander polar sind, müssen daher auch projectivisch auf einander bezogen sein.

Mit Hülfe dieser Bemerkungen lässt sich nun folgender Satz beweisen:

Jede Fläche II. Ordnung wird von einem Ebenenbündel II. Ordnung eingehüllt.

Wir denken uns die Fläche II. Ordnung durch zwei reciproke Strahlenbündel S und S_1 erzeugt, so dass in jedem Punkte P der Fläche ein Strahl von S durch die ihm entsprechende Ebene des Bündels S_1 geschnitten wird. Dann werden gleichzeitig die sämtlichen Berührungsebenen der Fläche durch zwei reciproke ebene Systeme σ und σ_1 erzeugt, indem die Berührungsebene des beliebigen Punktes P einen Strahl von σ mit dem ihm entsprechenden Punkte von σ_1 verbindet. Und zwar sind die ebenen Systeme polare Gebilde zu den Strahlenbündeln S und S_1 in Bezug auf die Fläche II. Ordnung; die Fläche wird in S und S_1 von den resp. Ebenen σ und σ_1 berührt, und jeder Geraden oder Ebene von S oder S_1 entspricht resp. ein Strahl oder Punkt in σ oder σ_1 .

Für spätere Untersuchungen führen wir noch folgende Benennungen ein:

Zwei Punkte, oder ein Punkt und ein Strahl heissen einander conjugirt, wenn jeder in der Polare des andern liegt.

Zwei Ebenen, oder eine Ebene und eine Gerade heissen einander conjugirt, wenn jede durch den Pol resp. die Polare der anderen geht.

„Zwei Gerade heissen einander conjugirt, wenn jede mit der Polare der anderen in einer Ebene liegt.“

Ein Punkt ist also conjugirt allen Punkten und Strahlen, welche in seiner Polar-Ebene liegen; eine Ebene allen Strahlen und Ebenen, welche durch ihren Pol gehen; und endlich eine Gerade g allen Punkten, welche auf ihrer Polare g_1 liegen, allen Ebenen, welche durch g_1 hindurchgehen, und allen Geraden, von welchen g_1 geschnitten wird. Jeder Punkt, jede Tangente und jede Berührungs-Ebene der Fläche ist somit auch sich selbst conjugirt.

Sind zwei Punkte A und B einander conjugirt in Bezug auf eine Fläche II. Ordnung, so sind sie auch einander conjugirt in Bezug auf jede Curve II. Ordnung, in welcher die Fläche von einer Ebene des Büschels $\overline{AB}$ geschnitten wird.

Denn die Polar-Ebene des Punktes A geht nach der Annahme durch B ; sie enthält aber auch (pag. 34) die Polare von A in Bezug auf jene Schnittcurve II. Ordnung, und folglich muss diese Polare den Punkt B enthalten, wie behauptet wurde. — Der Doppelsatz lässt sich auch umkehren.

Ist also g eine Gerade, welche nicht sich selbst conjugirt ist (d. h. die Fläche II. Ordnung nicht berührt), und werden einander zugeordnet:

je zwei einander conjugirte Punkte des geraden Gebildes g , so sind die Punkte dieses geraden Gebildes involutorisch gepaart. (I. Abth. pag. 122.)

Sind zwei Ebenen α und β einander conjugirt in Bezug auf eine Fläche II. Ordnung, so sind sie auch einander conjugirt in Bezug auf jede Kegelfläche II. Ordnung, welche die Fläche umhüllt und deren Mittelpunkt in der Geraden $\overline{\alpha\beta}$ liegt.

je zwei einander conjugirte Ebenen des Büschels g , so sind die Ebenen dieses Büschels involutorisch gepaart.

„Wenn in einem Strahlenbüschel, von welchem weder der Mittelpunkt noch die Ebene sich selbst conjugirt ist, je zwei conjugirte Strahlen einander zugewiesen werden, so sind die Strahlen involutorisch gepaart.“

Dieser letzte Satz lässt sich auf den vorhergehenden zurückführen. Nämlich in der Ebene des Strahlenbüschels können wir zu jedem Strahle einen ihm conjugirten Punkt bestimmen; wir erhalten so ein gerades Gebilde, dessen Punkte involutorisch gepaart sind, und zu welchem der Strahlenbüschel perspectivische Lage hat.

Anhang: Durchmesser und Durchmesser-Ebenen der Flächen II. Ordnung; Mittelpunkt und Hauptaxen.

„Die Halbierungspunkte eines Systemes paralleler Sehnen, welche nach einer beliebig gegebenen Richtung in einer Fläche II. Ordnung gezogen werden können, liegen in einer Ebene. Dieselbe wird eine Durchmesser-Ebene der Fläche II. Ordnung genannt; sie enthält auch die Berührungspunkte aller Tangenten und Berührungs-Ebenen, welche nach der gegebenen Richtung an die Fläche gelegt werden können, sowie die Mittelpunkte aller Curven II. Ordnung, welche auf der Fläche liegen und deren Ebenen jene Richtung enthalten.“

Diese Durchmesser-Ebene ist die Polare desjenigen unendlich fernen Punktes, welcher in der gegebenen Richtung liegt.

„Wird eine Fläche II. Ordnung durch ein System paralleler Ebenen geschnitten, so liegen die Mittelpunkte der Schnittcurven auf einer Geraden, welche ein Durchmesser der Fläche genannt wird. Die Berührungs-Ebenen derjenigen Punkte, in welchen die Fläche etwa vom Durchmesser geschnitten wird, sind ebenfalls jenen Schnittebenen parallel.“

Der Durchmesser ist nämlich die Polare der unendlich fernen Geraden, in welcher die parallelen Ebenen sich schneiden.

„Die sämtlichen Durchmesser und Durchmesser-Ebenen einer Fläche II. Ordnung gehen durch einen und denselben Punkt;“ nämlich durch den Pol der unendlich fernen Ebene, weil in dieser die Polaren aller Durchmesser und Durchmesser-Ebenen enthalten sind.

Wenn die Fläche II. Ordnung von der unendlich fernen Ebene berührt wird, so ist der Berührungspunkt selbst der Pol dieser Ebene; derselbe liegt also unendlich fern. Dieser Fall tritt ein bei den beiden Paraboloiden; also:

„Die Durchmesser und Durchmesser-Ebenen des hyperbolischen und des elliptischen Paraboloides gehen sämtlich durch denjenigen unendlich fernen Punkt, in welchem die Fläche von der unendlich fernen Ebene berührt wird. Sämtliche Durchmesser eines Paraboloides sind sonach unter einander parallel.“

Bei den übrigen Flächen II. Ordnung ist der Pol der unendlich fernen Ebene ein eigentlicher Punkt, welcher der Mittelpunkt der Fläche genannt wird.

„Der Mittelpunkt eines Ellipsoides, eines einfachen oder eines zweifachen Hyperboloides ist zugleich der Mittelpunkt jeder

„Curve II. Ordnung, welche auf der Fläche liegt und deren Ebene durch ihn hindurchgeht. Jede durch den Mittelpunkt gehende Sehne der Fläche wird in diesem Punkte halbt.“

Denn der Mittelpunkt ist jedem unendlich fernen Punkte oder Strahle conjugirt, und muss von dem unendlich fernen Punkte einer jeden Sehne durch zwei Curvenpunkte harmonisch getrennt sein (pag. 34).

„Die sämtlichen Ebenen, welche ein einfaches oder zweifaches Hyperboloid in seinen unendlich fernen Punkten berühren, schneiden sich im Mittelpunkte (pag. 36 u. 37), und umhüllen eine Kegelfläche II. Ordnung, welche der Asymptotenkegel des Hyperboloides genannt wird. Der Asymptotenkegel berührt das Hyperboloid in seiner unendlich fernen Curve. Die Schnittcurve, welche eine beliebige Ebene mit dem Hyperboloid gemein hat, ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Asymptotenkegel von der gegebenen oder einer parallelen Ebene in einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel geschnitten wird.“

Jedem Durchmesser eines Ellipsoides oder Hyperboloides ist eine Durchmesser-Ebene sowie jeder in dieser Ebene liegende Durchmesser conjugirt. Diese conjugirte Ebene halbt alle Sehnen der Fläche, welche dem Durchmesser parallel sind; und umgekehrt geht der Durchmesser durch die Mittelpunkte aller Kegelschnitte der Fläche, welche der conjugirten Durchmesser-Ebene parallel sind. Wenn die Verbindungs-Ebene von zwei conjugirten Durchmessern die Fläche II. Ordnung schneidet, so sind die Durchmesser auch in Bezug auf die Schnittcurve einander conjugirt, weil alle Sehnen dieser Curve, welche zu dem einen Durchmesser parallel sind, von dem andern halbt werden. Die Durchmesser der Fläche, welche in einer solchen Schnitt-Ebene liegen, sind folglich involutorisch gepaart (vergl. pag. 38, wo dieser Satz für einen beliebigen Strahlenbüschel bewiesen wurde).

Ein Durchmesser, welcher zu den ihm conjugirten Ebenen senkrecht steht, soll eine Hauptaxe der Fläche II. Ordnung heissen.

„Ein Paraboloid hat nur eine Hauptaxe a .“

In derselben liegen die Mittelpunkte derjenigen Kegelschnitte der Fläche, deren Ebenen zu der gemeinschaftlichen Richtung der Durchmesser rechtwinklig sind. Die Durchmesser-Ebenen, welche durch die Axe a gelegt werden können, sind paarweise einander conju-

girt, der Ebenenbüschel α ist also ein involutorischer (pag. 38). Schneiden wir denselben durch eine zu α senkrechte Ebene in einem involutorischen Strahlenbüschel, so folgt, je nachdem dieser ein rechtwinkliger ist oder nicht, dass entweder je zwei oder doch irgend zwei einander conjugirte Ebenen α und α_1 des Büschels α auf einander senkrecht stehen (I. Abth. pag. 142). Weil nun die Ebene α auch zu allen Ebenen, welche auf der Hauptaxe α senkrecht stehen, conjugirt und senkrecht ist, so ist sie auch senkrecht zu der Richtung, nach welcher ihr unendlich ferner Pol liegt; sie halbirt folglich alle zu ihr senkrechten Sehnen des Paraboloides, und kann desshalb eine Symmetrie-Ebene der Fläche genannt werden. Das Gleiche gilt von der Ebene α_1 .

„Das Paraboloid hat also mindestens zwei Symmetrie-Ebenen, welche sich in der Hauptaxe rechtwinklig schneiden.“

Wenn jede durch die Hauptaxe α gelegte Ebene eine Symmetrie-Ebene ist, so hat jede Schnittcurve des Paraboloides, deren Ebene zu α senkrecht steht, einen rechtwinkligen Durchmesserbüschel, wie vorhin bemerkt wurde, und ist folglich ein Kreis (I. Abth. pag. 90). Das Paraboloid ist in diesem Falle ein Rotations-Paraboloid.

Die Durchmesser eines Ellipsoides oder Hyperboloides stehen im Allgemeinen nicht senkrecht zu den ihnen conjugirten Durchmesser-Ebenen. Denn wenn dieses allgemein stattfindet, wenn also jeder Durchmesser eine Hauptaxe der Fläche ist, so haben wir einen besonderen Fall des Ellipsoides vor uns, die Kugel-Fläche. Alsdann ist nämlich jeder Durchmesserbüschel ein rechtwinkliger und folglich die Curve, in welcher seine Ebene die Fläche schneidet, ein Kreis; wesshalb auch alle Punkte dieser Fläche gleichen Abstand vom Mittelpunkte haben. — Im Allgemeinen steht auf einem beliebigen Durchmesser d eines Ellipsoides oder Hyperboloides nur ein einziger conjugirter Durchmesser d_1 senkrecht, welcher sowohl in der zu d conjugirten Durchmesser-Ebene δ , als auch in der zu d senkrechten Durchmesser-Ebene δ_1 liegt.

Beschreibt der Durchmesser d um den Mittelpunkt der Fläche einen Strahlenbüschel γ , so beschreibt die ihm conjugirte Durchmesser-Ebene δ einen Ebenenbüschel, welcher zum Strahlenbüschel γ projectivisch (pag. 37) und dessen Axe g der Ebene γ conjugirt ist. Zugleich beschreibt die zu d normale Durchmesser-Ebene δ_1 einen zweiten Ebenenbüschel, dessen Axe g_1 zur Ebene γ normal

ist; und auch dieser Ebenenbüschel g_1 ist zum Strahlenbüschel γ projectivisch, weil je zwei Strahlen des letzteren denselben Winkel mit einander bilden, wie die zu ihnen normalen Ebenen des ersteren. Die Ebenenbüschel g und g_1 sind folglich auch zu einander projectivisch, und erzeugen im Allgemeinen eine Kegelfläche II. Ordnung; oder:

„Beschreibt ein Durchmesser d des Ellipsoides oder des Hyperboloides um den Mittelpunkt einen Strahlenbüschel γ , so beschreibt gleichzeitig der Durchmesser d_1 , welcher zu d conjugirt und senkrecht ist, eine Kegelfläche II. Ordnung um „den Mittelpunkt.“

Eine Ausnahme von diesem Satze findet nur dann Statt, wenn der Strahlenbüschel γ eine Hauptaxe der Fläche enthält, weil dann die Ebenenbüschel g und g_1 die zu der Hauptaxe conjugirte Durchmesser-Ebene entsprechend gemein haben, also perspectivisch liegen.

Mit Hülfe dieses Satzes lässt sich der Beweis führen, dass jedes Ellipsoid oder Hyperboloid Hauptaxen besitzt, was in dem genannten Ausnahmefall ohnehin feststeht. Seien zu zwei Durchmesserbüscheln γ und ε die zugehörigen Kegelflächen II. Ordnung Γ und E construiert, und sei ε , was leicht ausführbar ist, so gewählt, dass durch E ein innerhalb und ein ausserhalb der Kegelfläche Γ gelegener Durchmesser mit einander verbunden werden. Dann müssen die concentrischen Kegelflächen Γ und E sich schneiden; sie haben also mindestens zwei und höchstens vier Strahlen mit einander gemein. Einer von diesen gemeinschaftlichen Strahlen ist conjugirt und senkrecht zu dem gemeinschaftlichen Strahle der Durchmesserbüschel γ und ε ; jeder andere α aber hat sowohl in γ als auch in ε einen conjugirten Durchmesser, zu welchem er senkrecht ist. Folglich ist α auch senkrecht zu der Ebene, in welcher die ihm conjugirten Durchmesser liegen, und somit eine Hauptaxe des Ellipsoides oder Hyperboloides. Die zur Hauptaxe α conjugirte Durchmesser-Ebene ist eine Symmetrie-Ebene der Fläche, weil sie alle zu ihr senkrechten Sehnen halbirt.

Der involutorische Durchmesserbüschel, welcher in der Symmetrie-Ebene liegt, ist entweder ein rechtwinkliger, oder er enthält zwei conjugirte Durchmesser b und c , die auf einander senkrecht stehen. Im ersteren Falle folgt ebenso, wie vorhin bei dem Paraboloid, dass die Fläche II. Ordnung eine Rotationsfläche und jeder dieser Durchmesser eine Hauptaxe derselben ist; im letzteren

Falle hat die Fläche nur drei Hauptaxen a , b , c , welche auf einander senkrecht stehen.

Wir sind in der jetzt beendigten Untersuchung über die Hauptaxen eines Ellipsoides oder Hyperboloides von dem Umstande ausgegangen, dass jedem Durchmesser eine Durchmesser-Ebene conjugirt ist, und dass jedem Durchmesserbüschel ein projectivischer Büschel von conjugirten Durchmesser-Ebenen entspricht. Ebenso ist bei der eigentlichen Kegelfläche II. Ordnung jedem durch den Mittelpunkt gehenden Strahl eine Durchmesser-Ebene zugeordnet, und jedem Büschel von solchen Strahlen ein projectivischer Büschel solcher Ebenen. Unsere Betrachtungen finden desshalb auch auf die Kegelflächen II. Ordnung Anwendung, und wir können den Satz aufstellen:

„Jedes Ellipsoid, jedes Hyperboloid und jede eigentliche Kegelfläche II. Ordnung hat drei zu einander rechtwinklige Hauptaxen, und deren drei Verbindungs-Ebenen sind Symmetrie-Ebenen der Fläche. Nur wenn die Fläche eine Rotationsfläche ist, hat sie mehr als drei, nämlich unendlich viele Hauptaxen.“

Siebenter Vortrag.

Affinität, Aehnlichkeit und Congruenz ebener Systeme und der Curven zweiter Ordnung.

Zwei collineare ebene Systeme Σ und Σ_1 werden affin genannt, wenn ihre unendlich fernen Geraden einander entsprechen. Jedem unendlich fernen Punkte des einen von zwei affinen Systemen entspricht also ein unendlich ferner Punkt im anderen, jedem Parallelogramm entspricht ein Parallelogramm, jedem geraden Gebilde ein projectivisch ähnliches gerades Gebilde. (I. Abth. pag. 75.)

„Sollen zwei ebene Systeme affin auf einander bezogen werden, so können wir in jedem derselben ein eigentliches Dreieck beliebig annehmen und die Eckpunkte dieser Dreiecke einander willkürlich zuweisen. Die Dreiecke bilden mit

„den unendlich fernen Geraden der Systeme zwei auf einander bezogene vollständige Vierseite, durch sie ist also (pag. 7) zu jedem Punkte oder Strahle des einen Systemes der zugehörige Punkt resp. Strahl des andern eindeutig bestimmt.“

Wir wissen, dass in projectivisch ähnlichen geraden Gebilden je zwei homologe Abschnitte in constantem Verhältniss zu einander stehen (I. Abth. pag. 95), dass also die geraden Gebilde durch ihre einander entsprechenden Punkte proportional getheilt sind. Sind nun in den affinen Systemen Σ und Σ_1 je zwei Gerade x, y und x_1, y_1 (Fig. 7) gegeben, die sich in den resp. Punkten M und M_1 schneiden und sind ferner die Verhältnisse $\frac{DC}{D_1 C_1}$ und $\frac{HE}{H_1 E_1}$ gegeben, in denen ihre homologen Abschnitte zu einander stehen, so kann auf folgende Weise zu jedem beliebig gegebenen Punkte K von Σ der entsprechende Punkt K_1 von Σ_1 construirt werden. Wir ziehen durch K eine Parallele zu x , welche die y im Punkte J schneidet, und eine Parallele zu y , welche von x im Punkte L geschnitten wird. Sodann bestimmen wir zu J den entsprechenden Punkt J_1 auf y_1 so, dass folgende Proportion befriedigt wird:

$$\frac{MJ}{M_1 J_1} = \frac{HE}{H_1 E_1},$$

und ebenso bestimmen wir zu L den entsprechenden Punkt L_1 auf x_1 so dass:

$$\frac{ML}{M_1 L_1} = \frac{DC}{D_1 C_1}.$$

Ziehen wir endlich durch J_1 eine Parallele zu x_1 und durch L_1 eine Parallele zu y_1 , so schneiden sich diese beiden Geraden im Punkte K_1 , welcher zu K der entsprechende ist.

Beiläufig bemerkt können wir diese Construction, welche durch das Vorhergehende vollständig begründet ist, in der Sprache der analytischen Geometrie wie folgt ausdrücken:

„Um zu einem gegebenen ebenen Gebilde ein affines zu construiren, beziehen wir dasselbe auf irgend zwei feste Coordinaten-Axen. Sodann vergrößern oder verkleinern wir die Ordinaten sämmtlicher Punkte nach einem beliebigen constanten Verhältniss und ebenso die Abscissen nach einem beliebig gewählten Verhältniss. Mittels dieser neuen Coordinaten endlich construiren wir die sämmtlichen Punkte des gesuchten affinen Gebildes in Bezug auf irgend zwei willkürlich angenommene, feste Coordinaten-Axen.“

Bezeichnen wir mit dem Namen Figur ein allseitig begrenztes Stück eines ebenen Systems, so können wir für affine ebene Systeme einen Satz aufstellen, welcher dem vorhin erwähnten Satze über projectivisch ähnliche gerade Gebilde ganz analog ist, nämlich:

In affinen ebenen Systemen stehen je zwei einander entsprechende Figuren in constantem Verhältniss zu einander; oder zwei beliebige Figuren des einen Systemes verhalten sich zu einander, wie die entsprechenden Figuren des andern Systemes.

Wir beweisen diesen Satz zunächst für Parallelogramme und Dreiecke. Seien also (Fig. 7) $ABCD$ und $EFGH$ zwei beliebige Parallelogramme des einen Systemes Σ , $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $E_1 F_1 G_1 H_1$ die resp. entsprechenden Parallelogramme des zweiten Systemes Σ_1 . Die Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ werden von $\overline{EH}$ in resp. J und M geschnitten, und von $\overline{FG}$ in resp. K und L ; so dass $JKLM$ ein neues Parallelogramm von Σ ist, welchem in Σ_1 ein analog gelegenes Parallelogramm $J_1 K_1 L_1 M_1$ entspricht. Die Parallelogramme $ABCD$ und $JKLM$ verhalten sich wie ihre Grundlinien DC und ML , weil ihre Höhen gleich sind, und ebenso verhält sich:

$$A_1 B_1 C_1 D_1 : J_1 K_1 L_1 M_1 = D_1 C_1 : M_1 L_1.$$

Weil aber die geraden Gebilde $MLDC$ und $M_1 L_1 D_1 C_1$ projectivisch ähnlich sind, so muss sich auch verhalten:

$$DC : ML = D_1 C_1 : M_1 L_1,$$

und wir erhalten folglich die Proportion:

$$ABCD : JKLM = A_1 B_1 C_1 D_1 : J_1 K_1 L_1 M_1.$$

Ganz ebenso ergibt sich, da

$$\frac{JKLM}{EFGH} = \frac{KL}{FG} = \frac{K_1 L_1}{F_1 G_1} = \frac{J_1 K_1 L_1 M_1}{E_1 F_1 G_1 H_1},$$

die Proportion:

$$JKLM : EFGH = J_1 K_1 L_1 M_1 : E_1 F_1 G_1 H_1;$$

und diese Proportion mit der vorhergehenden verbunden führt uns sofort zu der gesuchten:

$$ABCD : EFGH = A_1 B_1 C_1 D_1 : E_1 F_1 G_1 H_1.$$

Setzen wir statt jedes Parallelogramms seine Hälfte, nämlich das eine der beiden Dreiecke, in welche es durch eine Diagonale zerfällt, so entsteht die Proportion:

$$ABC : EFG = A_1 B_1 C_1 : E_1 F_1 G_1.$$

Da die Parallelogramme $ABCD$ und $EFGH$ ganz beliebig in Σ gewählt wurden, so dürfen wir auch die Dreiecke ABC und EFG als ganz beliebige betrachten. Wir haben also bewiesen, dass zwei beliebige Dreiecke des einen Systems sich zu ein-

ander verhalten wie die entsprechenden Dreiecke des anderen Systemes.

Auch für beliebige geradlinig begrenzte Figuren gilt aber unser Satz, weil dieselben durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt werden können; und auch für krummlinig begrenzte muss er Geltung haben, weil er für alle geradlinigen Figuren gilt, welche den krummlinigen entweder eingeschrieben oder umgeschrieben sind, und weil deren Flächeninhalte den Inhalten der krummlinig begrenzten Figuren unbegrenzt nahe gebracht werden können.

Ein besonderer Fall der Affinität ist die Gleichheit. Bei affinen Systemen tritt dieser Fall ein, wenn je zwei homologe Figuren derselben inhaltsgleich sind. Der Begriff der Gleichheit ist offenbar hier enger gefasst, als in der Planimetrie; denn z. B. zwei Vierecke $KL MN$ und $K_1 L_1 M_1 N_1$, welche denselben Inhalt haben, sind nur dann homologe Figuren affiner Systeme, wenn auch die Dreiecke $KL M$, $KL N$, $KM N$ und $LM N$, welche in dem Vierecke $KL MN$ enthalten sind, den resp. Dreiecken $K_1 L_1 M_1$, $K_1 L_1 N_1$, $K_1 M_1 N_1$ und $L_1 M_1 N_1$ inhaltsgleich sind. Wir haben hier eine Gleichheit auch der kleinsten einander entsprechenden Theile vor uns.

Zwei Curven, welche in affinen Systemen einander entsprechen, haben die gleiche Anzahl von unendlich fernen Punkten und Asymptoten, weil jedem unendlich fernen Punkte der einen Curve ein unendlich ferner Punkt der andern entsprechen muss, und jeder Tangente eine Tangente. Einer Ellipse können also nur Ellipsen affin sein, einer Parabel nur Parabeln, einer Hyperbel ausschliesslich Hyperbeln. Es lässt sich auch umgekehrt zeigen, dass zwei gleichartige Curven II. Ordnung stets affin auf einander bezogen werden können, und zwar auf unendlich viele Arten. Diese Beziehungen werden uns zu manchen interessanten Sätzen führen.

„Um zwei Parabeln affin auf einander zu beziehen, können wir irgend zwei Punkten A, B der einen zwei beliebige Punkte A_1, B_1 der andern willkürlich zuweisen. Dadurch ist aber jedem Punkte der einen Parabel oder ihrer Ebene ein Punkt der anderen resp. von deren Ebene zugewiesen.

Seien (Fig. 8) $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ die Tangenten der ersten Parabel k in den Punkten A und B , und ebenso $\overline{C_1 A_1}$ und $\overline{C_1 B_1}$ diejenigen der zweiten Parabel k_1 in A_1 und B_1 . Dann können und müssen wir die ebenen Systeme, welchen k und k_1 angehören,

in der Weise affin auf einander beziehen, dass den Eckpunkten des Dreiecks ABC die resp. Eckpunkte des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ entsprechen. Der Parabel k , welche in A und B die resp. Geraden $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ berührt und die unendlich ferne Gerade ihrer Ebene zur Tangente hat, entspricht dann eine Curve II. Ordnung, welche gleich k_1 von der Geraden $\overline{C_1 A_1}$ und $\overline{C_1 B_1}$ in resp. A_1 und B_1 berührt wird und die unendlich ferne Gerade zur Tangente hat, und welche folglich (I. Abth. pag. 64) mit k_1 zusammenfällt.

Das von der Sehne AB begrenzte Segment der Parabel k steht zu dem Dreieck ABC in demselben Verhältniss, wie das von $A_1 B_1$ begrenzte entsprechende Segment von k_1 zu dem Dreieck $A_1 B_1 C_1$. Da nun die Punkte A und B auf k ganz willkürlich angenommen sind, also auch durch irgend zwei andere ersetzt werden können, so folgt, dass jedes beliebige Parabelsegment in constantem Verhältniss steht zu demjenigen Dreieck, welches von der Sehne des Segmentes und den Tangenten der beiden Endpunkte begrenzt wird.

Sei nun (Fig. 9) G die Mitte der Sehne AB , so dass die Gerade CG in ihrem Halbirungspunkte D von der Parabel geschnitten wird (I. Abth. pag. 94); sei ferner EF die Tangente der Parabel im Punkte D , welche zur Sehne AB parallel läuft und in E und F die resp. Tangenten-Abschnitte AC und BC halbiert. Dann ist, wenn (AB) , (DB) und (AD) die Parabelsegmente über den resp. Sehnen AB , DB und AD bezeichnen:

$$\frac{(AB)}{ABC} = \frac{(DB)}{DBF} = \frac{(AD)}{ADE} = m,$$

indem m eine constante Zahl bedeutet. Andererseits ist nach der Figur:

$$(AB) = ABD + (DB) + (AD).$$

Setzen wir in die letzte Gleichung für (AB) , (DB) und (AD) ihre Werthe aus der vorhergehenden ein, so folgt für m :

$$m (ABC - DBF - ADE) = ABD.$$

Wegen $CD = DG$, $CF = FB$ und $CE = EA$ ist aber:

$$ABD = \frac{1}{2} ABC \text{ und } DBF + ADE = FCE = \frac{1}{4} ABC;$$

Die Gleichung für m geht hiedurch über in:

$$m (ABC - \frac{1}{4} ABC) = \frac{1}{2} ABC \text{ oder } m = \frac{2}{3}.$$

Somit ist auch $(AB) = \frac{2}{3} ABC$, und wir haben den Satz:

„Ein Parabelsegment ist zwei Dritteln des Dreiecks gleich,
 „welches von der Sehne des Segmentes und den Tangenten der
 „beiden Endpunkte begrenzt wird.“

Auch die Gleichung $(AB) = \frac{4}{3} ABD$ lässt sich ähnlich in Worten ausdrücken.

Sei (Fig. 10) KLM ein beliebiges Dreieck, welches einer Parabel eingeschrieben ist, und seien K_1, L_1, M_1 die Pole der resp. Seiten $\overline{LM}, \overline{MK}$ und $\overline{KL}$ dieses Dreiecks. Dann ergibt sich, wenn MK die grösste Seite des Dreiecks bezeichnet:

$$KLM = (MK) - (KL) - (LM),$$

oder:

$$KLM = \frac{2}{3}(KL_1M - KM_1L - LK_1M) = \frac{2}{3}(M_1L_1K_1 + KLM),$$

und folglich:

$$KLM = 2M_1L_1K_1;$$

das heisst:

„Ein der Parabel eingeschriebenes Dreieck ist zweimal so gross, wie dasjenige umschriebene Dreieck, von dessen Seiten die Parabel in den Eckpunkten des eingeschriebenen berührt wird.“

Zwei Parabeln können auch als gleiche Curven betrachtet werden, denn wir können sie auf unzählig viele Weisen so auf einander affin beziehen, dass je zwei homologe Segmente, wie (AB) und (A_1B_1) (Fig. 8), inhaltsgleich sind.

In zwei affinen Ellipsen oder Hyperbeln entsprechen einander die Durchmesser, und zwar muss jedem Paare conjugirter Durchmesser der einen Curve ein Paar conjugirter Durchmesser der anderen entsprechen. Dieses ergibt sich daraus, dass jeder Schaar paralleler Sehnen der einen Curve wieder eine Schaar paralleler Sehnen der anderen entspricht, und wegen der Proportionalität homologer Abschnitte auch dem Mittelpunkt einer Sehne nothwendig der Mittelpunkt der entsprechenden Sehne. Bei affinen Hyperbeln entsprechen ausserdem die Asymptoten einander.

„Um zwei Hyperbeln affin auf einander zu beziehen, können wir jeder Asymptote der einen eine Asymptote der anderen zuweisen und ausserdem noch irgend einem Punkte oder auch einer Tangente der ersteren einen beliebigen Punkt resp. eine Tangente der anderen Hyperbel.“

Die Hyperbeln lassen sich nämlich projectivisch so auf einander beziehen (I. Abth. pag. 104), dass den beiden unendlich fernen Punkten und einem beliebigen dritten Punkte der einen die resp. unendlich fernen Punkte und irgend ein dritter Punkt der anderen entsprechen. Dadurch sind aber die beiden ebenen Systeme, in welchen die Hyperbeln liegen, collinear auf einander bezogen (pag. 9), und sogar affin, weil die Verbindungslinien der unend-

lich fernen Hyperbelpunkte, d. h. die unendlich fernen Geraden der Systeme, einander entsprechen.

„Um zwei Ellipsen k und k_1 affin auf einander zu beziehen, „können wir auf denselben je zwei Punkte A, B und A_1, B_1 „annehmen, die auf je zwei conjugirten Durchmessern liegen, „und diese Punkte einander paarweise zuordnen.“

Seien $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ (Fig. 11) die beiden Parallelogramme, welche den resp. Ellipsen k und k_1 eingeschrieben sind und welche die gegebenen Paare conjugirter Durchmesser $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ und $\overline{A_1C_1}$, $\overline{B_1D_1}$ zu Diagonalen haben, seien ferner M und M_1 die Mittelpunkte von resp. k und k_1 . Dann können und müssen wir die ebenen Systeme, denen k und k_1 angehören, affin so auf einander beziehen, dass den Punkten A, B, C des einen die resp. Punkte A_1, B_1, C_1 des andern entsprechen. Nun entspricht aber dem Halbirungspunkte M von $\overline{AC}$ nothwendig der Halbirungspunkt M_1 von $\overline{A_1C_1}$, und der Ellipse k , welche in A und C von zwei Parallelen zum Durchmesser $\overline{MB}$ berührt wird und durch B geht, muss die Ellipse k_1 entsprechen als diejenige Curve II. Ordnung, welche in A_1 und C_1 von zwei Parallelen zur Geraden $\overline{M_1B_1}$ berührt wird und durch B_1 hindurchgeht.

Die conjugirten Durchmesser $\overline{MA}$ und $\overline{MB}$ der einen Ellipse k können mit zwei beliebigen anderen vertauscht, die Ellipsen k und k_1 also auf unzählig viele Weisen affin auf einander bezogen werden. Bei jeder Lage von $\overline{MA}$ und $\overline{MB}$ muss sich das Parallelogramm $ABCD$ zu der Fläche der Ellipse k verhalten, wie das unveränderte Parallelogramm $A_1B_1C_1D_1$ zu der Fläche der Ellipse k_1 . Also:

„Alle einer Ellipse eingeschriebenen Parallelogramme, deren „Diagonalen von zwei conjugirten Durchmessern gebildet werden, „sind inhaltsgleich.“

Das umschriebene Parallelogramm (Fig. 11), dessen Seiten die Ellipse in den Punkten A, B, C, D berühren, ist doppelt so gross wie $ABCD$; also:

„Alle einer Ellipse umschriebenen Parallelogramme, deren „Seiten zu je zwei conjugirten Durchmessern parallel laufen, „sind inhaltsgleich.“

Sind $2a$ und $2b$ die Längen der beiden Axen einer Ellipse, so ist $4ab$ der Inhalt jedes solchen umschriebenen Parallelogramms; denn $4ab$ ist der Inhalt des Rechteckes, welches von den Scheiteltangenten der Ellipse begrenzt wird. Sei nun die Ellipse affin

bezogen auf einen Kreis vom Radius r ; dann verhält sich die Fläche J der Ellipse zu $4ab$ wie die Fläche $r^2\pi$ des Kreises zu dem Inhalt $4r^2$ eines dem Kreise umschriebenen Quadrates (pag. 45).

Also:

$$J : 4ab = r^2\pi : 4r^2 \text{ oder } J = a \cdot b \cdot \pi.$$

„Die Fläche der Ellipse ist gleich dem Product aus ihren beiden Halbaxen in die Zahl π .“

Weil der Kreis durch zwei conjugirte Durchmesser in vier gleiche Theile zerlegt wird, so gilt dasselbe von der Ellipse.

Zwei collineare ebene Systeme Σ und Σ_1 heissen ähnlich, wenn je zwei homologe Winkel derselben einander gleich sind. Weil je zwei Parallelen von Σ wieder zwei Parallelen von Σ_1 entsprechen und also jedem unendlich fernen Punkte von Σ ein unendlich ferner Punkt in Σ_1 , so sind die ähnlichen Systeme auch affin. Die Seiten homologer Dreiecke von Σ und Σ_1 sind einander proportional, weil die Dreiecke gleiche Winkel haben; und folglich stehen überhaupt je zwei einander entsprechende geradlinige Strecken der Systeme in constantem Verhältniss zu einander. Zwei ähnliche Systeme sind in perspectivischer Lage, sobald irgend zwei Gerade des einen, welche sich in einem eigentlichen Punkte schneiden, zu den ihnen resp. entsprechenden Geraden des anderen Systemes parallel laufen; denn dann sind je zwei homologe Gerade einander parallel, und die ebenen Systeme haben ihr unendlich fernes gerades Gebilde entsprechend gemein (vergl. pag. 15 und 16). Die ähnlichen Systeme erscheinen in dieser Lage entweder als parallele Schnitte eines Strahlenbündels, oder sie liegen in einander und haben noch einen Strahlenbüschel entsprechend gemein.

Werden also zwei ähnliche Curven II. Ordnung in perspectivische Lage gebracht, so dass irgend zwei sich schneidende Sehnen oder Tangenten der einen zu den homologen Sehnen oder Tangenten der anderen parallel laufen, so ist jede Sehne oder Tangente der einen Curve parallel zu der homologen Sehne oder Tangente der anderen. Und die Curven liegen entweder in einer Ebene, so dass die sämtlichen Verbindungslinien homologer Punkte sich in einem und demselben Punkte schneiden, oder sie erscheinen als parallele Schnitte einer und derselben Kegelfläche. Zwei Parabeln können stets als ähnliche Curven II. Ordnung betrachtet werden; bringt man ihre Ebenen und ihre Axen in parallele Lagen, so laufen auch je zwei einander entsprechende

Tangenten der Parabeln parallel. Zwei Ellipsen oder Hyperbeln können nur dann als ähnliche Curven betrachtet werden, wenn je zwei conjugirte Durchmesser der einen mit zwei conjugirten Durchmessern der anderen zusammenfallen, sobald die Hauptaxe sowohl als auch die Nebenaxen der Curven mit einander zur Deckung gebracht werden. Bei dieser Lage der Curven sind die Berührungspunkte von je zwei parallelen Tangenten auf demjenigen Durchmesser gelegen, welcher den Tangenten conjugirt ist. Zwei ähnliche Hyperbeln liegen also zwischen gleichen Asymptotenwinkeln.

Wie die Affinität ein besonderer Fall ist von der Collineation und die Aehnlichkeit wieder von der Affinität, so ist die Congruenz ein besonderer Fall der Aehnlichkeit. Nämlich zwei ähnliche ebene Systeme heissen congruent, wenn je zwei einander entsprechende geradlinige Strecken derselben gleich gross sind. So führt uns die Verwandtschaft der Collineation auch zu denjenigen räumlichen Beziehungen, mit denen die Planimetrie sich vorzugsweise beschäftigt.

Achter Vortrag.

Affinität, Aehnlichkeit, Congruenz und Symmetrie räumlicher Systeme und der Flächen zweiter Ordnung.

Zwei collineare räumliche Systeme Σ und Σ_1 werden affin genannt, wenn ihre unendlich fernen Ebenen einander entsprechen. Da hiernach auch jeder unendlich fernen Geraden von Σ eine solche in Σ_1 entspricht, so sind auch je zwei homologe ebene Systeme von Σ und Σ_1 affin; und ebenso sind je zwei homologe gerade Gebilde von Σ und Σ_1 projectivisch ähnlich. Jedem Parallelogramm von Σ muss in Σ_1 ein Parallelogramm entsprechen, und jedem Parallelepipeton ein Parallelepipeton.

„Um zwei räumliche Systeme affin auf einander zu beziehen, dürfen wir in jedem derselben ein eigentliches Tetraeder beliebig annehmen und die Eckpunkte dieser Tetraeder einander willkürlich zuweisen.“

Weil nämlich hiedurch die vier Seitenflächen des einen Tetraeders denjenigen des andern zugewiesen sind, ausserdem aber die un-

endlich fernen Ebenen der Systeme einander entsprechen sollen, so ist zu jedem Elemente des einen Systems das entsprechende des andern eindeutig bestimmt (pag. 21). Die Construction affiner Gebilde lässt sich mit Hülfe von Parallelcoordinaten ganz ähnlich für den Raum ausführen wie oben (pag. 44) für die Ebene; ich übergehe den leichten Beweis dieser Behauptung.

Bezeichnen wir ein allseitig begrenztes Stück eines räumlichen Systemes mit dem Namen Körper, so können wir folgenden Satz aufstellen:

In affinen räumlichen Systemen stehen je zwei einander entsprechende Körper in constantem Verhältniss; oder zwei beliebige Körper des einen Systems verhalten sich zu einander, wie die entsprechenden Körper des anderen Systems.

Wir beweisen diesen Satz zunächst für Parallelepipeda und Tetraeder, indem wir einige wenige Sätze aus der Stereometrie als bekannt voraussetzen. Seien P und Q zwei beliebige Parallelepipeda des einen Systemes Σ , P_1 und Q_1 die resp. entsprechenden von Σ_1 . Wir bilden in Σ irgend ein drittes Paralleleipedon R , welches zwischen zwei parallelen Seitenflächen von P und zugleich zwischen zwei solchen von Q liegt, und bestimmen auch zu diesem das entsprechende Paralleleipedon R_1 in Σ_1 . Weil nun P und R zwischen parallelen Ebenen liegen, so haben sie gleiche Höhen, und verhalten sich wie ihre Grundflächen; und dasselbe gilt von P_1 und R_1 . Die Grundflächen von P und R verhalten sich aber zu einander wie diejenigen von P_1 und R_1 , weil die ebenen Systeme, in denen diese Flächenpaare liegen, affin sind. Folglich verhält sich:

$$P : R = P_1 : R_1.$$

Dieselben Schlüsse finden auch auf R , Q , R_1 und Q_1 Anwendung, so dass

$$R : Q = R_1 : Q_1.$$

Aus beiden Proportionen ergiebt sich:

$$P : Q = P_1 : Q_1,$$

und der Satz ist somit für beliebige Parallelepipeda bewiesen.

Durch jeden Eckpunkt A eines Paralleleipedon (Fig. 12) gehen drei Kanten desselben, welche A mit drei anderen Eckpunkten B , C und D verbinden. Die Diagonal-Ebene $\overline{BCD}$ schneidet vom Paralleleipedon ein Tetraeder $ABCD$ ab, welches dieselbe Höhe, aber nur eine halb so grosse Grundfläche hat wie das Paralleleipedon, und dessen Inhalt also ein Sechstel vom Inhalt des Paralleleipedon beträgt. Schneiden wir von P und Q je

ein solches Tetraeder ab, so können wir diese Tetraeder als zwei ganz beliebige des Systemes Σ ansehen, weil P und Q ganz beliebig gewählt wurden. Die entsprechenden Tetraeder in Σ sind analog gelegene Stücke von P_1 und Q_1 , und da

$$\frac{P}{6} : \frac{Q}{6} = \frac{P_1}{6} : \frac{Q_1}{6},$$

so haben wir bewiesen, dass zwei beliebige Tetraeder des Systemes Σ sich zu einander verhalten, wie die entsprechenden beiden Tetraeder von Σ_1 .

Aber auch für beliebige von Ebenen begrenzte Körper gilt unser Satz, weil dieselben stets in Tetraeder zerlegt werden können. Er muss sogar für krummflächige Körper gelten, weil er für alle ebenflächigen gilt, welche den krummflächigen entweder eingeschrieben oder umschrieben sind, und deren Inhalte den Inhalten der krummflächigen Körper beliebig nahe gebracht werden können. — Ist das Verhältniss, in welchem zwei homologe Körper zu einander stehen, gleich der Einheit, so werden die affinen räumlichen Systeme einander gleich genannt. Ebene Systeme, welche in gleichen räumlichen Systemen einander entsprechen, sind im Allgemeinen nicht gleich, sondern nur affin.

Zwei affine Flächen haben entweder beide keinen Punkt mit der unendlich fernen Ebene gemein, oder sie werden von derselben beide in je einem Punkte berührt, oder endlich in je einer unendlich fernen Curve geschnitten; denn jedem unendlich fernen Punkte der einen Fläche muss ein unendlich ferner Punkt der anderen entsprechen. Daraus, und weil einer geradlinigen Fläche nur eine geradlinige collinear sein kann (pag. 23), ergiebt sich, dass nur gleichartige Flächen II. Ordnung affin auf einander bezogen werden können; also z. B. zwei Ellipsoide, zwei einfache Hyperboloide, zwei elliptische Paraboloiden, zwei eigentliche Kegelflächen u. s. w. Da jeder Schaar paralleler Sehnen der einen Fläche wieder einer Schaar paralleler Sehnen in der affinen Fläche entsprechen muss, und jedem Mittelpunkt einer Sehne der Mittelpunkt der homologen Sehne, so folgt:

„In zwei affinen Flächen II. Ordnung entspricht jeder Durchmesser-Ebene eine Durchmesser-Ebene, und zwei conjugirten Durchmessern entsprechen zwei conjugirte Durchmesser.“

Sollen zwei elliptische oder auch zwei hyperbolische Paraboloiden Π und Π_1 affin auf einander bezogen werden, so nehmen wir auf jedem derselben eine Curve II. Ordnung an, welche nicht

durch den unendlich fernen Punkt des Paraboloides hindurchgeht und somit keine Parabel sein kann, und beziehen diese beiden Curven affin auf einander; dadurch ist dann jedem Punkte von Π ein solcher von Π_1 zugewiesen. Seien nämlich A, B, C drei Punkte der einen Curve k , und sei D der Pol ihrer Ebene in Bezug auf die Fläche Π , auf welcher k liegt; seien ferner A_1, B_1, C_1 die entsprechenden Punkte der anderen Curve k_1 , und D_1 der Pol ihrer Ebene in Bezug auf Π_1 , so können und müssen die räumlichen Systeme, in welchen die Paraboloiden liegen, affin so auf einander bezogen werden, dass den Eckpunkten des Tetraeders $ABCD$ die resp. Eckpunkte des Tetraeders $A_1 B_1 C_1 D_1$ entsprechen. Weil dann die ebenen Systeme ABC und $A_1 B_1 C_1$ ebenfalls einander affin sind, so entspricht der Curve k die Curve k_1 in der angenommenen Weise; und auch die Tangentenkegel der Flächen Π und Π_1 , durch welche k und k_1 aus resp. D und D_1 projecirt werden, entsprechen einander. Ferner entsprechen einander die beiden Durchmesser d und d_1 der Flächen Π und Π_1 , durch welche die Punkte D und D_1 mit den resp. Mittelpunkten von k und k_1 verbunden werden. Jeder Parabel endlich, welche auf Π liegt und von k in zwei Punkten K und L geschnitten wird, und deren Ebene durch d hindurchgeht, entspricht im zweiten räumlichen Systeme eine Parabel, welche von k_1 in den entsprechenden beiden Punkten K_1 und L_1 geschnitten wird und deren Ebene durch d_1 hindurchgeht; und zwar liegt diese zweite Parabel auf der Fläche Π_1 , weil sie mit einer ebenen Schnittcurve derselben ihre unendlich ferne Tangente, ferner die Punkte K_1 und L_1 und endlich noch die Tangenten $\overline{D_1 K_1}$ und $\overline{D_1 L_1}$ gemein hat, welche den Tangenten $\overline{DK}$ und $\overline{DL}$ der ersten Parabel entsprechen. Weil nun jeder beliebige Punkt von Π auf irgend einer solchen Parabel liegt, so entspricht ihm ein Punkt von Π_1 ; d. h. die Flächen Π und Π_1 entsprechen einander.

Ist Π (und ebenso Π_1) ein elliptisches Paraboloid, so wird von demselben durch die Ebene der Ellipse k ein Segment abgeschnitten, welches zu dem Kegel, dessen Grundfläche von k begrenzt wird und dessen Spitze der Punkt D ist, in demselben Verhältniss steht, wie das entsprechende Segment von Π_1 zu dem entsprechenden Kegel D_1 . Da wir nun die Ellipse k willkürlich auf der Fläche Π gewählt haben, so ergibt sich der Satz:

„Jedes Segment eines elliptischen Paraboloides steht in constantem Verhältniss zu demjenigen Kegel, welcher mit dem

„Segment die Grundfläche gemein hat, und dessen Spitze im „Pole dieser Grundfläche liegt.“

Durch Rechnung lässt sich, am leichtesten am Rotations-Paraboloid, nachweisen, dass dieses Verhältniss $= \frac{3}{4}$ ist.

Um zwei beliebige Ellipsoide Π und Π_1 affin auf einander zu beziehen, brauchen wir nur die Curven II. Ordnung k und k_1 , in welchen die Flächen von je einer beliebigen Durchmesser-Ebene geschnitten werden, affin auf einander zu beziehen, und ausserdem zwei Punkte D und D_1 der Flächen einander zuzuweisen, deren Berührungs-Ebenen jenen resp. Durchmesser-Ebenen parallel sind. Nämlich die beiden räumlichen Systeme, in welchen die Ellipsoide liegen, lassen sich, wie soeben gezeigt wurde, in der Art affin auf einander beziehen, dass die Punkte D und D_1 und die Ellipsen k und k_1 in der angenommenen Weise einander entsprechen. Auch die Mittelpunkte M und M_1 der Ellipsen, welche zugleich Mittelpunkte der Ellipsoide sind, entsprechen dann einander. Und jeder Ellipse, die auf Π liegt und mit k zwei Punkte K und L gemein hat und deren Ebene den Durchmesser $\overline{MD}$ enthält, entspricht im zweiten räumlichen System eine Ellipse, welche mit k_1 die entsprechenden Punkte K_1 und L_1 gemein hat und deren Ebene durch $\overline{M_1 D_1}$ geht. Diese zweite Ellipse liegt aber auf dem Ellipsoid Π_1 , weil sie mit einer Schnittcurve desselben die Punkte D_1, K_1, L_1 gemein hat, sowie die beiden Tangenten in K_1 und L_1 ; denn diese Tangenten laufen zu dem Durchmesser $\overline{M_1 D_1}$ parallel, weil die entsprechenden Tangenten der Punkte K und L zu $\overline{MD}$ parallel sind, und weil die Durchmesser $\overline{M_1 D_1}$ und $\overline{MD}$ den resp. Durchmesser-Ebenen k_1 und k conjugirt sind.

Die Ellipsen k und k_1 können, wie wir früher sahen, affin auf einander bezogen werden, indem wir irgend zwei conjugirte Durchmesser der einen zwei beliebigen conjugirten Durchmessern der anderen willkürlich zuweisen. Da nun hier die Ebenen dieser Durchmesser und damit auch ihre conjugirten Durchmesser $\overline{MD}$ und $\overline{M_1 D_1}$ willkürlich auf den Ellipsoiden angenommen wurden, so ergiebt sich:

„Um zwei Ellipsoide affin auf einander zu beziehen, können wir „in jedem derselben drei Durchmesser annehmen, von welchen „jeder den beiden anderen conjugirt ist, und diese einander „paarweise zuordnen.“

Daraus aber folgt mit Leichtigkeit der Satz:

„Alle Parallelepipeda, deren Seitenflächen ein Ellipsoid in den

„Endpunkten von irgend drei einander conjugirten Durchmessern berühren, sind inhaltsgleich;“
 sie stehen zu dem Inhalte des Ellipsoides in demselben Verhältniss, wie der Inhalt eines Würfels zu demjenigen einer, dem Würfel eingeschriebenen Kugel, also wie $8 : \frac{4\pi}{3}$. Zum Beweise beziehen wir das Ellipsoid affin auf die Kugel. Bezeichnen wir mit J den Inhalt des Ellipsoides und mit $2a, 2b, 2c$ die von ihm eingeschlossenen Abschnitte der drei Axen, so ergibt sich für den Inhalt desjenigen umschriebenen Parallelepipeds, dessen Seitenflächen zu den drei Symmetrie-Ebenen des Ellipsoides parallel laufen, $8 \cdot a \cdot b \cdot c$, und folglich ist:

$$J = \frac{4}{3} a b c \pi.$$

Weil die Kugel durch drei einander conjugirte Durchmesser-Ebenen in acht gleiche Theile zerlegt wird, so gilt (pag. 52) dasselbe vom Ellipsoid.

Um zwei einfache oder auch zwei zweifache Hyperboloide affin auf einander zu beziehen, brauchen wir nur die Curven II. Ordnung k und k_1 , in welchen ihre resp. Asymptotenkegel von zwei beliebigen Berührungs-Ebenen der Flächen geschnitten werden, affin auf einander zu beziehen, und ausserdem die Mittelpunkte der beiden Flächen einander zuzuordnen. Ich übergehe den Beweis dieses Satzes, weil derselbe den vorigen ganz analog ist; nur mache ich darauf aufmerksam, dass die Punkte, in welchen jene beiden Ebenen die resp. Hyperboloide berühren, zugleich die Mittelpunkte der Curve k und k_1 sind (vergl. I. Abth. pag. 93), und folglich einander entsprechen müssen.

Zwei collineare räumliche Systeme Σ und Σ_1 heissen ähnlich, wenn je zwei homologe Winkel derselben einander gleich sind. Folglich sind (pag. 50) auch je zwei einander entsprechende ebene Systeme von Σ und Σ_1 ähnlich, und weil somit jeder unendlich fernen Geraden von Σ eine solche von Σ_1 entspricht, so sind die räumlichen Systeme auch affin. Je zwei homologe Strecken ähnlicher Systeme stehen in constantem Verhältniss zu einander, wie sich schon daraus ergibt, dass dieser Satz für ähnliche ebene Systeme bereits bewiesen ist. Haben zwei ähnliche räumliche Systeme solche Lage, dass irgend drei Gerade des einen, von denen keine zwei durch denselben unendlich fernen Punkt gehen, mit den ihnen entsprechenden Geraden des anderen Systemes

parallel laufen, so müssen je zwei homologe Gerade der Systeme einander parallel sein (vergl. pag. 50), und die Systeme haben ihr unendlich fernes ebenes System entsprechend gemein, oder liegen perspectivisch (pag. 25). Je zwei homologe Punkte liegen folglich mit einem festen Collineations-Centrum in einer Geraden.

Wenn in zwei ähnlichen räumlichen Systemen je zwei homologe Strecken einander gleich sind, so nennen wir die Systeme entweder congruent oder symmetrisch. Bringen wir nämlich die Systeme in solche Lage, dass sie einen Strahlenbündel entsprechend gemein haben, so fällt entweder jeder Punkt mit seinem homologen zusammen, oder die Strecke zwischen beiden wird vom Mittelpunkt jenes Strahlenbündels halbirt. Im ersteren Falle sind die Systeme congruent, im zweiten symmetrisch. Eine Fläche II. Ordnung z. B. wird durch eine Durchmesser-Ebene in zwei symmetrische Hälften getheilt.

Neunter Vortrag.

Reciproke Systeme, welche in einander liegen. Polarsysteme in der Ebene und im Raume. Nullsysteme.

Wenn zwei reciproke ebene Systeme Σ und Σ_1 auf einander gelegt werden, so kann jeder Punkt ihrer Ebene sowohl zu Σ als auch zu Σ_1 gerechnet werden; ihm entsprechen also auch zwei Strahlen, einer in Σ_1 und einer in Σ . Ebenso entsprechen jeder Geraden der Ebene zwei Punkte, weil wir die Gerade zu jedem der reciproken Systeme zählen können. Es wird deshalb zweckmässig sein, wenn wir die Elemente der Ebene mit je zwei Buchstaben bezeichnen, z. B. einen beliebigen Punkt mit AB_1 . Dem Punkte A von Σ entspricht dann im Systeme Σ_1 ein Strahl a_1 ; und dem nämlichen Punkte, wenn wir ihn zu Σ_1 rechnen und mit B_1 bezeichnen, entspricht in Σ ein Strahl b . Ebenso nun, wie wir bei projectivischen geraden Gebilden, die in einander liegen, untersucht haben, ob und wie viele Punkte des einen mit den entsprechenden Punkten des andern zusammenfallen, und unter welchen Umständen die Gebilde involutorisch liegen, ebenso wollen wir hier die analogen Fragen erörtern: Wie viele Punkte liegen auf

den ihnen entsprechenden Geraden? und wann fallen die beiden Geraden, welche jedem Punkte der Ebene entsprechen, auf einander?

Wenn ein Punkt $A B_1$ auf dem einen a_1 der beiden Strahlen liegt, die ihm entsprechen, so liegt er auch auf dem anderen b . Denn dem Punkte B_1 des geraden Gebildes a_1 entspricht in Σ zufolge der Definition der reciproken Verwandtschaft ein Strahl b des Büschels A . Ebenso geht eine beliebige Gerade $p q_1$ entweder durch keinen oder durch jeden der beiden Punkte P_1 und Q , welche ihr entsprechen.

Projiciren wir die reciproken Systeme Σ und Σ_1 aus zwei beliebigen Punkten S und S_1 durch Strahlenbündel, so sind auch diese reciprok und erzeugen also eine Fläche II. Ordnung. Jeder Punkt der Ebene, welcher auf den ihm entsprechenden Geraden liegt, gehört auch dieser Fläche II. Ordnung an, weil in ihm ein Strahl des Bündels S von der entsprechenden Ebene des Bündels S_1 geschnitten wird. Umgekehrt liegt jeder Punkt, welchen die Fläche II. Ordnung mit der Ebene gemein hat, auf den beiden Geraden, die ihm in den reciproken Systemen Σ und Σ_1 entsprechen. Je nachdem nun die Fläche II. Ordnung mit der Ebene eine Curve II. Ordnung, oder zwei Gerade, oder nur eine Gerade, oder einen einzigen Punkt, oder endlich gar keinen Punkt gemein hat, tritt einer der folgenden Fälle ein:

„Wenn zwei reciproke Systeme in derselben Ebene liegen, so
 „bilden die sämtlichen Punkte der Ebene, welche auf ihren
 „entsprechenden Geraden liegen, entweder eine Curve II. Ordnung, oder ein System von zwei Geraden, oder eine Gerade,
 „oder es giebt nur einen einzigen oder endlich gar keinen
 „solchen Punkt. Zugleich bilden die sämtlichen Strahlen der
 „Ebene, welche durch die ihnen entsprechenden Punkte hindurch-
 „gehen, entweder einen Büschel II. Ordnung, oder ein System
 „von zwei Büscheln I. Ordnung, oder einen Büschel I. Ordnung, oder es giebt nur einen einzigen oder endlich gar
 „keinen solchen Strahl.“

Die Strahlengebilde, welche in der zweiten Hälfte des Satzes genannt sind, entsprechen den Punktgebilden der ersten Hälfte und liegen zu denselben in doppelter Weise perspectivisch.

Im Allgemeinen hat die Fläche II. Ordnung entweder gar keinen Punkt mit der Ebene gemein, oder eine Curve II. Ordnung; denn wenn die Ebene zwei oder eine Gerade oder nur einen Punkt

der Fläche enthält, so berührt sie die Fläche, und hat also zu derselben eine ganz besondere Lage. Von den im Satze genannten Fällen tritt also im Allgemeinen entweder der erste oder der letzte ein, und nur ausnahmsweise einer der übrigen. So z. B. werden wir finden, dass bei reciproken Systemen, welche involutorische Lage haben, niemals diese besonderen Fälle stattfinden können.

Die involutorische Lage reciproker ebener Systeme tritt dann ein, wenn jedem Punkte der Ebene zwei Gerade entsprechen, welche zusammenfallen, wenn also jedem Punkte eine Gerade in doppelter Weise entspricht. Dass diese involutorische Lage möglich ist, erhellt aus folgendem Satz:

„Zwei reciproke ebene Systeme Σ und Σ_1 liegen involutorisch, wenn den Eckpunkten A, B, C eines Dreiecks von Σ die ihnen gegenüber liegenden Seiten a_1, b_1, c_1 desselben Dreiecks in Σ_1 entsprechen“ (Fig. 13).

Zunächst leuchtet ein, dass die Eckpunkte des Dreiecks den gegenüber liegenden Seiten in doppelter Weise entsprechen. Bezeichnen wir z. B. mit A_1 den zu Σ_1 gehörigen Schnittpunkt von b_1 und c_1 , welcher mit dem Punkte A von Σ zusammenfällt, so entspricht ihm in Σ die Dreiecksseite a , welche die Eckpunkte B und C verbindet und mit der Geraden a_1 von Σ_1 zusammenfällt; den Punkten B_1 und C_1 von Σ_1 , in welchen die Seitenpaare c_1, a_1 und a_1, b_1 sich schneiden und die mit den resp. Punkten B und C von Σ zusammenfallen, entsprechen ebenso in Σ die gegenüber liegenden Dreiecksseiten b und c , welche die Punktenpaare C, A und A, B mit einander verbinden und mit resp. b_1 und c_1 von Σ_1 zusammenfallen.

Dem Strahlenbüschel AA_1 entspricht folglich auch das gerade Gebilde $a_1 a$ in doppelter Weise; und da dem Strahle bb_1 dieses Büschels der Punkt $B_1 B$ und dem Strahle cc_1 der Punkt $C_1 C$ doppelt entspricht, so liegt der Büschel AA_1 involutorisch zu dem geraden Gebilde $a_1 a$ (I. Abth. pag. 122). Jedem beliebigen Strahle des Büschels AA_1 muss also ein Punkt des geraden Gebildes $a_1 a$ doppelt entsprechen; und ebenso ergibt sich, dass jedem Strahle der Büschel BB_1 oder CC_1 ein Punkt von resp. $b_1 b$ oder $c_1 c$ doppelt entspricht. Sei nun ein beliebiger Strahl p_1 oder p in der Ebene gegeben, so schneidet dieser die Dreiecksseiten in drei Punkten, welchen drei Strahlen der Büschel AA_1, BB_1 und CC_1 doppelt entsprechen. Also muss auch dem Strahle $p_1 p$ derjenige

Punkt PP_1 in doppelter Weise entsprechen, in welchem jene drei Strahlen sich schneiden; oder die reciproken Systeme liegen involutorisch.

Wir können die beiden involutorisch liegenden Systeme auch als ein einziges System betrachten, in welchem jedem Punkte eine Gerade und jedem geraden Gebilde ein zu ihm involutorisch liegender Strahlenbüschel zugeordnet ist, und wollen alsdann dieses System ein ebenes Polarsystem nennen. Jeder Punkt desselben, welcher auf der ihm zugeordneten Geraden liegt, soll ein Ordnungspunkt, und diese Gerade ein Ordnungsstrahl des Systemes genannt werden. Dann lässt sich beweisen:

„Ein ebenes Polarsystem hat entweder gar keine oder unendlich viele Ordnungspunkte und Ordnungsstrahlen. Im letzteren Falle erfüllen die Ordnungspunkte eine Curve II. Ordnung, welche von den Ordnungsstrahlen berührt wird und die Ordnungs-Curve oder Directrix des Polarsystems genannt werden soll.“

Sei A (Fig. 14) ein Punkt des Polarsystems, welcher auf der ihm zugeordneten Geraden a liegt; dann muss jeder von A verschiedene Punkt B der Geraden a ausserhalb der ihm zugeordneten Geraden b liegen, weil b durch A geht und nicht mit a zusammenfallen kann. Weil ausserdem das gerade Gebilde b zu dem Strahlenbüschel B und folglich zu einem Schnitte desselben involutorisch liegt, so enthält dasselbe ausser A noch einen zweiten Ordnungspunkt C (I. Abth. pag. 119). Das Polarsystem enthält also unendlich viele Ordnungspunkte, sobald ein solcher vorhanden ist. Erfüllten nun diese sämtlichen Ordnungspunkte eine einzige Gerade, so würde keineswegs auf einem beliebigen Strahle, welcher einen Ordnungspunkt A enthält, noch ein zweiter Ordnungspunkt liegen; und erfüllten sie zwei Gerade, so würde einem beliebigen Punkte A der einen Geraden ein durch A gehender Strahl a zugeordnet sein, welcher die andere Gerade in noch einem Ordnungspunkte schneidet, während doch jeder Ordnungsstrahl a nur einen einzigen Ordnungspunkt A enthalten darf. Die Ordnungspunkte des Systems erfüllen sonach (pag. 58) eine Curve II. Ordnung, und dieselbe wird von den Ordnungsstrahlen berührt, weil jeder der letzteren nur einen einzigen Ordnungspunkt mit der Curve gemein hat.

Hieraus ergeben sich auf's Neue die Eigenschaften der Polarität von Curven II. Ordnung; zugleich aber erkennen wir die Mög-

lichkeit von Polarsystemen, welche keine Ordnungs-Curve besitzen. Auch auf diese Polarsysteme wollen wir nun die Bezeichnungen ausdehnen, welche wir früher bei der Untersuchung der Polarität von Curven II. Ordnung aufgestellt haben. So soll im Polarsystem jeder Punkt der Pol der ihm zugeordneten Geraden genannt werden, und umgekehrt jede Gerade die Polare des ihr zugeordneten Punktes. Ferner heissen zwei Punkte des Polarsystems einander conjugirt, wenn jeder auf der Polare des anderen liegt, und zwei Strahlen, wenn jeder durch den Pol des andern geht. Endlich soll jedes Dreieck im Polarsystem, dessen Eckpunkte die Pole der gegenüber liegenden Seiten sind, in welchem also je zwei Eckpunkte und je zwei Seiten einander conjugirt sind, ein Polardreieck genannt werden.

„In einem ebenen Polarsystem sind unendlich viele Polardreiecke enthalten.“

Man construirt ein Polardreieck, indem man auf einer beliebigen Geraden a (Fig. 13), die nicht durch ihren Pol A geht, irgend einen Punkt B annimmt, welcher nicht auf seiner Polare b liegt, und endlich noch den Schnittpunkt C der Geraden a und b bestimmt. Da C der Pol von AB ist, so ist das Dreieck ABC ein Polardreieck.

„Wird in einer Ebene ein beliebiges Dreieck ABC als Polardreieck angenommen, und ausserdem irgend einem Punkte P (Fig. 13), welcher auf keiner Seite des Dreiecks liegt, eine Gerade p zugeordnet, welche durch keinen Eckpunkt desselben geht, so ist dadurch ein ebenes Polarsystem bestimmt.“

Wir können und müssen nämlich die beiden Systeme, aus welchen das Polarsystem gebildet wird, reciprok so auf einander beziehen, dass den vier Punkten A, B, C, P des einen die resp. Geraden BC, CA, AB, p des anderen entsprechen. Dann haben (pag. 59) diese beiden Systeme involutorische Lage, wie verlangt wird.

„Wenn das Polarsystem eine Ordnungs-Curve hat, so schliesst diese von jedem Polardreieck ABC einen Eckpunkt ein und die beiden anderen Eckpunkte aus.“

Liegt nämlich der Eckpunkt A innerhalb der Ordnungs-Curve, so liegen alle Punkte seiner Polare BC ausserhalb derselben; und liegt A ausserhalb der Curve, so wird diese von der Polare BC geschnitten, und je zwei conjugirte Punkte dieser Polare, wie z. B. B und C , sind folglich durch die Curve harmonisch getrennt, so dass einer derselben innerhalb, der andere ausserhalb der Curve liegt.

Um zu entscheiden, ob ein gegebenes Polarsystem eine Ordnungs-Curve hat oder nicht, brauchen wir hiernach nur zu untersuchen, ob zwei von den Seiten irgend eines Polardreiecks Ordnungspunkte enthalten oder nicht, oder was dasselbe ist, ob die geraden Gebilde, welche in diesen Seiten liegen, zu den ihnen zugeordneten Strahlenbüscheln entgegengesetzt oder einstimmig involutorisch liegen (I. Abth. pag. 119). Die Aufgabe, von einem Polarsysteme die Ordnungs-Curve zu construiren, gehört zu denjenigen zweiten Grades und ist leicht zu lösen mittelst der Construction, durch welche in einem involutorischen geraden Gebilde die Ordnungspunkte gefunden werden.

Projiciren wir ein ebenes Polarsystem Σ aus einem beliebigen Punkte S , welcher nicht in Σ liegt, so erhalten wir ein Polarsystem im Strahlenbündel. Jedem Strahle des Bündels S ist eine Ebene desselben zugeordnet, und umgekehrt. Hat das ebene Polarsystem eine Ordnungs-Curve, so wird dieselbe durch eine Kegelfläche II. Ordnung projicirt, welche die Ordnungsfläche oder Directrix des Polarsystems im Strahlenbündel genannt wird. Je zwei Strahlen oder Ebenen des Bündels sind in diesem Polarsystem einander conjugirt, wenn sie in Bezug auf die Ordnungsfläche desselben einander conjugirt sind, und umgekehrt.

Wir wollen jetzt für zwei reciproke räumliche Systeme analoge Untersuchungen ausführen wie diejenigen, welche soeben für reciproke ebene Systeme und reciproke Strahlenbündel beendet wurden. Die bisher gewonnenen Resultate werden uns dabei von wesentlichem Nutzen sein. Wir schliessen bei dieser Untersuchung den besonderen Fall vorläufig aus, in welchem jede Ebene des einen Systems durch den ihr entsprechenden Punkt des anderen hindurchgeht, indem wir später diesen Fall für sich erörtern wollen.

Sei nun α eine beliebige Ebene des ersten räumlichen Systems Σ , welche nicht durch den ihr entsprechenden Punkt A_1 des zweiten Systems Σ_1 hindurchgeht. Dann entspricht dem ebenen System α von Σ ein zu ihm reciproker Strahlenbündel A_1 von Σ_1 . Wir können diesen Bündel durch die Ebene α in einem zweiten ebenen System α_1 schneiden, welches dann auch zu dem ersten in α liegenden System reciprok ist. Jeder Punkt von α , welcher in der ihm entsprechenden Geraden von α_1 liegt, ist auch auf der ihm entsprechenden Ebene des Bündels A_1 enthalten, und ausserdem wissen wir bereits, dass alle solche Punkte, wenn überhaupt deren

in α vorkommen, eine Curve II. Ordnung bilden, welche auch in zwei Gerade zerfallen, oder sich auf eine Gerade oder auch auf einen einzigen Punkt reduciren kann.

Sei ferner β eine Ebene von Σ , welche durch den ihr entsprechenden Punkt B_1 von Σ_1 hindurchgeht. Rechnen wir alsdann dieselbe Ebene zu Σ_1 und bezeichnen sie demgemäss etwa mit γ_1 , so entspricht ihr in Σ ein Punkt C , welcher auf β liegen muss, weil γ_1 durch B_1 hindurchgeht. Dem Strahlenbüschel C von Σ , welcher in der Ebene β liegt, entspricht in Σ_1 ein ihm projectivischer Strahlenbüschel der Ebene γ_1 , dessen Mittelpunkt B_1 ist. Diese Strahlenbüschel erzeugen also eine Curve II. Ordnung, welche auch in zwei Gerade zerfallen kann, und von welcher jeder Punkt auf den ihm entsprechenden Ebenen der reciproken räumlichen Systeme liegt. Denn sei P derjenige Punkt, in welchem ein beliebiger Strahl p des Büschels C von dem entsprechenden Strahle p_1 der Ebene γ_1 geschnitten wird, so entspricht diesem Punkte P des Strahles p eine Ebene π_1 , des Systemes Σ_1 , welche durch den Strahl p_1 und damit auch durch den Punkt P selbst hindurchgeht. Hieraus folgt:

„Die sämtlichen Punkte des Raumes, welche auf den ihnen entsprechenden Ebenen der reciproken Systeme liegen, sind auf einer Fläche II. Ordnung enthalten; und die sämtlichen Ebenen, welche durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen, bilden einen Ebenenbündel II. Ordnung.“

Denn wir haben bewiesen, dass der geometrische Ort dieser Punkte, mit einer beliebigen Ebene α oder β , welche überhaupt solche Punkte enthält, eine Curve II. Ordnung, oder zwei Gerade, oder eine Gerade, oder endlich einen einzigen Punkt gemein hat, und diese Eigenschaft kommt nur der Fläche II. Ordnung zu. Der Ebenenbündel II. Ordnung, welcher in der zweiten Hälfte des Satzes genannt wurde, entspricht in jedem der reciproken räumlichen Systeme jener Fläche II. Ordnung. Durch unseren Satz ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass kein Punkt des Raumes auf den ihm entsprechenden Ebenen liege. Den unwichtigen besonderen Fall des Satzes lassen wir unerörtert, in welchem die Fläche II. Ordnung in zwei ebene Systeme zerfällt.

„Zwei reciproke räumliche Systeme Σ und Σ_1 liegen involutorisch, wenn den Eckpunkten A, B, C, D eines Tetraeders von Σ die ihnen gegenüber liegenden Seitenflächen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ desselben Tetraeders in Σ_1 entsprechen.“

Dem Schnittpunkte der Ebenen $\beta_1, \gamma_1, \delta_1$, d. h. dem Punkte A von Σ_1 , entspricht auch in Σ die Ebene BCD oder α_1 , und ebenso entspricht jedem anderen Eckpunkte des Tetraeders die gegenüber liegende Seitenfläche in doppelter Weise. Daraus folgt, dass das ebene System α_1 zu dem ihm reciproken Strahlenbündel A involutorisch liegt; denn es hat (pag. 59) zu einem Schnitt desselben involutorische Lage. Jedem Punkte oder Strahle von α_1 (und ebenso von β_1, γ_1 oder δ_1) entspricht also eine Ebene oder ein Strahl von A (resp. von B, C oder D) in doppelter Weise. Und folglich muss jeder beliebigen Ebene, welche von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ in irgend vier Geraden geschnitten wird, derjenige Punkt doppelt entsprechen, welcher aus A, B, C, D durch die entsprechenden vier Strahlen projicirt wird.

Wir können die involutorisch liegenden räumlichen Systeme Σ und Σ_1 als ein einziges System betrachten, in welchem jedem Punkte eine Ebene und jeder Geraden eine Gerade zugeordnet ist. Dieses System wird ein räumliches Polarsystem genannt, und jeder Punkt heisst der Pol der ihm zugeordneten Ebene, jede Gerade oder Ebene heisst die Polare des ihr zugeordneten Strahles resp. Punktes. Wenn das Polarsystem Punkte enthält, welche auf ihren Polar-Ebenen liegen, so sind dieselben (pag. 63) auf einer Fläche II. Ordnung enthalten, der sogenannten Ordnungsfläche oder Directrix des Polarsystems. Dass umgekehrt durch eine Fläche II. Ordnung, welche keine Kegelfläche ist, ein räumliches Polarsystem bestimmt wird, dessen Directrix jene Fläche ist, zeigen die Entwicklungen des sechsten Vortrages. Die dort (pag. 37) gegebene Definition conjugirter Punkte, Strahlen und Ebenen soll hinfort für jedes räumliche Polarsystem gelten, auch wenn dasselbe keine Ordnungsfläche besitzt.

Im räumlichen Polarsystem soll ferner jedes Tetraeder, dessen Eckpunkte die Pole der gegenüberliegenden Seitenflächen sind, ein Pol-Tetraeder genannt werden; in demselben sind je zwei Eckpunkte einander conjugirt, und ebenso je zwei Seitenflächen oder je zwei Kanten. Im räumlichen Polarsystem sind unendlich viele ebene Polarsysteme, polare Strahlenbündel und Pol-Tetraeder enthalten. Weil nämlich jeder Strahlenbündel A , dessen Mittelpunkt ausserhalb des ihm zugeordneten ebenen Systemes α liegt, dem letzteren reciprok ist und zu demselben involutorische Lage hat, so erscheint die Ebene α als Träger eines Polarsystems, in welchem jedem Punkte die ihm conjugirte Gerade

zugeordnet ist; und ebenso erscheint der Punkt A als Mittelpunkt eines polaren Strahlenbündels. Jedes Polardreieck des ebenen Polarsystems wird aus dem Punkte A durch ein Polardreieck des polaren Strahlenbündels projicirt, und bildet mit diesem ein Pol-Tetraeder des räumlichen Polarsystems. Jedes ebene Polarsystem α , welches dem räumlichen angehört, hat auch dann einen Mittelpunkt und Durchmesser, wenn es keine Ordnungscurve besitzt. Der Mittelpunkt ist der unendlich fernen Geraden des Polarsystems α conjugirt, und jeder Durchmesser einem unendlich fernen Punkte von α . Die Durchmesser sind paarweise einander conjugirt, und zwei derselben stehen ausserdem auf einander senkrecht und heissen die Axen des Polarsystems α . Ebenso sollen die drei einander conjugirten Strahlen des polaren Strahlenbündels A , welche paarweise auf einander senkrecht stehen, die Hauptaxen des Bündels A genannt werden, auch wenn der Bündel keinen Ordnungskegel besitzt.

„Wird ein Tetraeder $ABCD$ als Pol-Tetraeder angenommen und noch zu irgend einem Punkte E , welcher auf keiner Fläche des Tetraeders liegt, eine Ebene ε zugeordnet, welche durch keinen Eckpunkt des Tetraeders hindurchgeht, so ist dadurch ein räumliches Polarsystem bestimmt.“

Wir können nämlich zwei räumliche Systeme reciprok so auf einander beziehen, dass den fünf Punkten A, B, C, D, E die resp. Ebenen $\overline{BCD}, \overline{CDA}, \overline{DAB}, \overline{ABC}$ und ε entsprechen (pag. 20). Die beiden Systeme liegen alsdann involutorisch (pag. 63) und bilden zusammen ein Polarsystem.

Bei der Betrachtung reciproker räumlicher Systeme haben wir vorhin den Fall ausgeschlossen, wenn jeder beliebige Punkt P des einen Systemes Σ in der ihm entsprechenden Ebene π_1 des anderen Σ_1 liegt. Wenn dieser Fall eintritt, so liegen die reciproken Systeme Σ und Σ_1 involutorisch. Denn zunächst kann keine Gerade g des ersten Systemes von ihrer entsprechenden g_1 des zweiten Systemes geschnitten werden, weil alsdann nur zwei Punkte des geraden Gebildes g auf den ihnen entsprechenden Ebenen des Büschels g_1 liegen würden: nämlich der Schnittpunkt gg_1 und derjenige Punkt, welcher der Ebene g_1g von Σ_1 entspricht. Wenn nun einem beliebigen Punkte P von Σ eine durch ihn gehende Ebene π_1 von Σ_1 entspricht, so muss jeder Strahl g von P , welcher in dieser Ebene liegt, mit dem entsprechenden Strahle g_1 von π_1 zusammenfallen, weil er

mit ihm in derselben Ebene π_1 liegen muss, ohne ihn zu schneiden; und es folgt daraus, dass die Ebene π_1 , wenn sie als Verbindungs-Ebene von zwei solchen Strahlen betrachtet und zu Σ gerechnet wird, dem Punkte P von Σ_1 als Schnittpunkt derselben Strahlen entsprechen muss.

Weil hiernach jedem Punkte P eine Ebene π_1 doppelt entspricht, so liegen die reciproken räumlichen Systeme involutorisch und können wieder als ein einziges System aufgefasst werden. Wir wollen dasselbe ein Nullsystem nennen; jedem Punkte und jeder Geraden desselben ist eine Ebene resp. Gerade als Polare zugeordnet, und jeder Ebene ein Punkt als Pol. Das Nullsystem hat demnach folgende Haupt-Eigenschaften:

„Im Nullsystem geht jede Ebene durch ihren Pol; jedes ebene System hat mit dem ihm zugeordneten Strahlenbündel einen Strahlenbüschel entsprechend gemein; jede Gerade, welche mit ihrer Polare in einer Ebene liegt, fällt mit derselben zusammen; jedes gerade Gebilde endlich, welches mit der Axe des ihm zugeordneten Ebenenbüschels keinen Punkt gemein hat, liegt zu diesem Ebenenbüschel perspectivisch.“

Wir wollen jede sich selbst zugeordnete Gerade einen Leitstrahl des Nullsystems nennen, so dass wir auch sagen können:

„Die sämtlichen Leitstrahlen des Nullsystemes, welche in einer beliebig gegebenen Ebene π_1 liegen, bilden einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der Pol dieser Ebene ist.“

Sind a und a_1 zwei einander zugeordnete Gerade, die keine Leitstrahlen sind, so liegt das gerade Gebilde a perspectivisch zu dem ihm zugeordneten Ebenenbüschel a_1 , und ebenso das gerade Gebilde a_1 perspectivisch zu dem Ebenenbüschel a . Daraus folgt:

„Jeder Strahl, welcher zwei einander zugeordnete Gerade a, a_1 des Nullsystems schneidet, ist ein Leitstrahl; und umgekehrt muss jeder Leitstrahl des Nullsystems, welcher eine Gerade a schneidet, auch mit der Polare a_1 dieser Geraden in einer Ebene liegen. Zwei Paare einander zugeordneter Geraden sind folglich Strahlen von einer und derselben Regelschaar, deren Leitschaar aus Leitstrahlen des Nullsystems besteht.“

Anmerkung.

Bis jetzt scheint nicht bemerkt worden zu sein, dass die Aufgabe der Mechanik: *)

*Das Nullsystem ist gerade von Steiner in seinen Vorlesungen
über die Geometrie der Lage, Bd. I, S. 489.*

„Zwei Einzelkräfte zu construiren, welche ein gegebenes räumliches Kräftesystem völlig ersetzen“

auf ein Nullsystem führt. Sobald nämlich ein Punkt P gegeben ist, durch welchen die eine Kraft gehen soll, so ist eine durch P gehende Ebene π mitbestimmt, in welcher die andere Einzelkraft liegen muss. Ist also eine Gerade gegeben, in welcher die eine Kraft wirken soll, so wirkt die andere in einer ganz bestimmten zugeordneten Geraden, und beide Kräfte sind durch das Kräftesystem auch der Grösse nach gegeben. Wenn zwei beliebige Kräfte S, S_1 , die nicht in einer Ebene liegen, durch zwei andere Q, Q_1 ersetzt werden, so müssen alle vier auf einer Regel-
fläche liegen (pag. 66).

Der Beweis ergibt sich leicht daraus, dass jedes gegebene Kräftesystem auf eine Einzelkraft R und ein Kräftepaar reducirt werden kann; und zwar kann ein beliebiger Punkt P des Raumes als Angriffspunkt der Einzelkraft R angenommen werden, und die Ebene π des Kräftepaares darf man parallel so verschieben, dass sie durch den Punkt P geht. Das Kräftepaar wird von zwei parallelen und einander entgegengesetzten Kräften T gebildet, von denen wir die eine in P angreifen lassen können. Dieser letzteren wollen wir eine solche Grösse und Richtung (in der Ebene π) geben, dass sie mit der Kraft R eine Resultirende S von willkürlich vorgeschriebener Richtung erzeugt; dadurch ist alsdann in π auch die zweite Kraft T des Paares der Lage, Richtung und Grösse nach völlig bestimmt, und ebenso die durch P gehende Einzelkraft S . Die Kräfte S und T ersetzen das gegebene Kräftesystem, und die eine T liegt in der Ebene π , während die andere S durch den in π liegenden Punkt P hindurchgeht.

In dem Nullsystem, welches so durch das Kräftesystem bestimmt ist, entspricht die unendlich ferne Ebene dem unendlich fernen Punkte der Kraft R . Wenn die eine der Kräfte S und T in einem Leitstrahle des Nullsystemes wirken soll, so findet man, dass auch die andere in diesem Leitstrahle wirkt und dass beide unendlich gross werden. Die Gerade, in welcher die Kraft R wirkt, lässt sich mit Hülfe des Nullsystems leicht so verlegen, dass die Ebene des zugehörigen Kräftepaares zu ihr senkrecht wird; das Moment des Kräftepaares wird dann bekanntlich ein Minimum.

Zehnter Vortrag.

Erzeugnisse von zwei collinearen Strahlenbündeln oder ebenen Systemen. Raumcurven und Ebenenbüschel dritter Ordnung.

Durch reciproke Grundgebilde zweiter und dritter Stufe sind wir zu den Flächen und Ebenenbündeln II. Ordnung und deren wichtigsten Eigenschaften geführt worden. Betrachten wir jetzt die Erzeugnisse collinearer Grundgebilde, und zwar zunächst dasjenige von zwei collinearen Strahlenbündeln. Das Gesetz der Reciprocität gestattet uns, die gewonnenen Resultate hernach auf das Erzeugniss von zwei collinearen ebenen Systemen sofort zu übertragen.

Die gegebenen collinearen Bündel S und S_1 sollen weder concentrisch noch perspectivisch liegen; auch nehmen wir ausdrücklich an, dass sie weder eine Ebene noch auch den Strahl $\overline{SS_1}$ entsprechend gemein haben. Denn diese speciellen Fälle sind theils schon früher untersucht worden, theils von geringer Bedeutung für uns. Je zwei homologe Ebenen der Bündel schneiden sich in einem Strahle, und die beiden Bündel erzeugen unendlich viele solche Strahlen, deren Gesammtheit wir mit dem Namen Secantensystem bezeichnen wollen. Diese Strahlen erfüllen den ganzen unendlichen Raum; denn:

„Durch jeden Punkt A des Raumes geht im Allgemeinen ein
 „einziger Strahl des Secantensystemes. Wenn in einem Punkte
 „ P zwei Strahlen des Systemes sich schneiden, so ist P zugleich
 „der Schnittpunkt von zwei homologen Strahlen der Bündel
 „ S und S_1 und es gehen durch P unendlich viele Strahlen
 „des Secantensystems, welche eine Kegelfläche II. Ordnung
 „erfüllen.“

Dem Ebenenbüschel $\overline{SA}$ des Bündels S entspricht in S_1 ein zweiter Ebenenbüschel, dessen Axe im Allgemeinen nicht durch den Punkt A geht, welcher also nur eine einzige durch A gehende Ebene enthält. Und nur diese eine Ebene schneidet die ihr entsprechende des Bündels S in einem durch A gehenden Strahle des Systemes. Wenn aber durch einen Punkt P zwei Strahlen des Systemes

hindurchgehen, wenn also zwei Ebenen α und β von S mit den entsprechenden Ebenen α_1 und β_1 des Bündels S_1 den Punkt P gemein haben, so entspricht der Geraden $\overline{\alpha\beta}$ oder $\overline{SP}$ die Gerade $\overline{\alpha_1\beta_1}$ oder $\overline{S_1P}$, und P ist der Schnittpunkt von zwei homologen Strahlen der Bündel S und S_1 . Und die Strahlen des Secantensystems, welche die projectivischen Ebenenbüschel $\overline{SP}$ und $\overline{S_1P}$ mit einander erzeugen, bilden eine Kegelfläche II. Ordnung, von welcher P der Mittelpunkt ist.

Es giebt unendlich viele solche Punkte P , und zu denselben gehören namentlich auch die Mittelpunkte der Bündel S und S_1 . Denn der Strahl $\overline{SS_1}$ oder a des Bündels S wird von dem entsprechenden Strahle a_1 von S_1 im Punkte S_1 geschnitten; und ebenso ist S der Schnittpunkt von zwei homologen Strahlen der Bündel. Jede beliebige Ebene ε des Büschels $\overline{SS_1}$ oder a enthält aber noch einen dritten solchen Punkt P . Ihr entspricht nämlich im Bündel S_1 eine durch a_1 gehende Ebene ε_1 ; und dem Strahle g_1 , in welchem ε_1 von ε geschnitten wird und welcher auch dem Bündel S_1 angehört, entspricht in S ein Strahl g der Ebene ε , so dass also g und g_1 in einer Ebene ε liegen und in dem erwähnten Punkte P sich schneiden. Die sämtlichen Strahlen des Bündels S_1 , welche von den homologen Strahlen des Bündels S geschnitten werden, stellen sich hiernach dar als Schnittlinien von homologen Ebenen der Büschel a (oder $\overline{SS_1}$) und a_1 . Und weil diese Ebenenbüschel projectivisch sind als einander entsprechende Gebilde collinearer Strahlenbündel, so folgt:

„In jedem der collinearen Bündel S und S_1 liegen diejenigen Strahlen, welche von ihren entsprechenden geschnitten werden, in einer durch $\overline{SS_1}$ gehenden Kegelfläche II. Ordnung; auch gehören sie dem Secantensystem an, welches die Bündel erzeugen.“

Jede durch $\overline{SS_1}$ gelegte Schnitt-Ebene ε trifft die beiden Kegelflächen II. Ordnung, auf welchen diese Strahlen liegen, noch in zwei von $\overline{SS_1}$ verschiedenen Strahlen, die einander entsprechen und in einem jener bemerkenswerthen Punkte P sich schneiden. Dreht ε sich stetig um $\overline{SS_1}$, so bewegt auch P sich stetig auf beiden Kegelflächen, beschreibt also eine Curve. Wenn ε sich unbegrenzt derjenigen Ebene nähert, welche die Kegelfläche S im Strahle $\overline{SS_1}$ berührt, so nähert sich $\overline{SP}$ unbegrenzt dem Strahle $\overline{SS_1}$ oder a , und P dem Punkte S_1 ; die Secante $\overline{S_1P}$ der von P beschriebenen Curve geht dabei in die Tangente a_1 über (I. Abth.

pag. 66), welche dem Strahle $\overline{SS_1}$ oder a entspricht. Die Berührungs-Ebene der einen Kegelfläche S am Strahle $\overline{SS_1}$ schneidet somit die andere Kegelfläche S_1 in noch einem von $\overline{SS_1}$ verschiedenen Strahle a_1 , welcher die von P beschriebene Curve in S_1 berührt. Hieraus ist zugleich ersichtlich, dass die Kegelflächen einander in $\overline{SS_1}$ nicht berühren, sondern schneiden.

„Zwei nicht concentrische Kegelflächen II. Ordnung, welche „in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte S und S_1 sich „schneiden, haben ausserdem die sämtlichen Punkte P einer „gewundenen Curve k mit einander gemein. Dieselbe geht „durch S und S_1 und wird eine Raumcurve dritter Ordnung genannt, weil sie mit einer Ebene höchstens drei „Punkte gemein hat, mindestens aber einen Punkt.“

Beziehen wir die Kegelflächen perspectivisch auf den Ebenenbündel $\overline{SS_1}$ und damit projectivisch auf einander, so ist durch sie die collineare Verwandtschaft der Strahlenbündel S und S_1 völlig festgestellt (pag. 9). Dass sodann die Schnittpunkte P auf einer durch S und S_1 gehenden Curve k liegen, folgt aus der vorhergehenden Betrachtung. Durch jeden Strahl der Kegelfläche S wird nur ein einziger von S verschiedener Punkt der Curve projecirt, nämlich derjenige, in welchem der Strahl von dem entsprechenden Strahle der Kegelfläche S_1 geschnitten wird. Also enthält jede durch S gehende Ebene höchstens zwei von S verschiedene Punkte der Curve, weil nicht mehr als zwei Strahlen der Kegelfläche S in der Ebene liegen können. Dasselbe gilt von einer durch S_1 gelegten Ebene. Eine beliebige Ebene aber, welche die Gerade $\overline{SS_1}$ in einem von S und S_1 verschiedenen Punkte A schneidet, hat mit den beiden Kegelflächen zwei Curven II. Ordnung gemein, die sich in A schneiden, und folglich ausserdem noch in mindestens einem Punkte und höchstens drei Punkten einander treffen. Jeder solche gemeinschaftliche Punkt liegt aber auch auf der Raumcurve k , weil er auf beiden Kegelflächen und nicht auf $\overline{SS_1}$ enthalten ist. Also ist bewiesen, dass jede Ebene mindestens einen Punkt und höchstens drei Punkte mit k gemein hat; und hieraus folgt sofort, dass k von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten wird.

Jede Gerade, welche zwei Punkte P und Q der Raumcurve k III. Ordnung verbindet, gehört dem Secantensystem an, welches von den collinearen Bündeln S und S_1 erzeugt wird. Die Curve k wird aus jedem ihrer Punkte durch eine Kegelfläche II. Ordnung projecirt.

Den Strahlen $\overline{SP}$ und $\overline{SQ}$ entsprechen die resp. Strahlen $\overline{S_1P}$ und $\overline{S_1Q}$, und der Ebene $\overline{SPQ}$ muss demnach die Ebene $\overline{S_1PQ}$ entsprechen; so dass wirklich in $\overline{PQ}$ zwei homologe Ebenen der Bündel S und S_1 sich schneiden. Jeder Strahl, welcher aus dem Punkte P einen anderen Punkt Q der Curve k projecirt, gehört somit dem Secantensystem an; und weil alle durch P gehenden Strahlen des Systemes auf einer Kegelfläche II. Ordnung liegen (pag. 68), so ist auch der zweite Theil des Satzes bewiesen. Nähert sich der Punkt Q auf der Curve unbegrenzt dem Punkte P , so nähert sich die Secante $\overline{PQ}$ der Tangente von k im Punkte P . In dieser Tangente schneiden sich die beiden Ebenen, welche die Kegelflächen S und S_1 in den resp. Strahlen $\overline{SP}$ und $\overline{S_1P}$ berühren und folglich einander entsprechen. Also:

„Die Tangenten der Raumcurve III. Ordnung gehören ebenfalls dem Secantensystem an. In ihnen schneiden sich die homologen Berührungs-Ebenen der Kegelflächen S und S_1 .“

Wenn die Raumcurve k III. Ordnung gegeben ist, so kennen wir auch die Kegelflächen Sk und S_1k II. Ordnung, durch welche k aus den Punkten S und S_1 projecirt wird, und welche durch den Ebenenbüschel $\overline{SS_1}$ oder wenn Sie wollen durch die Curve k projectivisch auf einander bezogen sind. Da hiedurch auch die collineare Verwandtschaft der Strahlenbündel S und S_1 völlig festgestellt ist, so ist mit der Curve auch das ganze, von S und S_1 erzeugte Secantensystem gegeben. Umgekehrt ist die Curve k völlig bestimmt, sobald das Secantensystem gegeben ist. Es ist zweckmässig, diese gegenseitige Abhängigkeit der Raumcurve und des Secantensystems durch folgende Bezeichnung zum Ausdruck zu bringen:

„Die sämtlichen Strahlen des Secantensystems sollen Secanten der Raumcurve k III. Ordnung, und letztere soll die Ordnungscurve des Secantensystems genannt werden. Insbesondere nennen wir irgend einen Strahl des Systems eine eigentliche Secante, eine Tangente oder eine uneigentliche Secante der Curve, je nachdem derselbe in zwei Punkten die Curve schneidet, sie in einem Punkte berührt, oder keinen Punkt mit derselben gemein hat.“

Jede Secante der Curve k wird durch zwei einander entsprechende Ebenen der Bündel S und S_1 projecirt; durch zwei Secanten werden also zwei Paare homologer Ebenen, und damit die Axen von zwei projectivischen Ebenenbüscheln bestimmt, die

in den collinearen Bündeln einander entsprechen. Diese Ebenenbündel erzeugen eine Regelschaar oder auch eine Kegelfläche II. Ordnung, welche nur Secanten der Curve k und namentlich auch jene beiden ersten Secanten enthält. Daher der Satz:

„Durch die Raumcurve k III. Ordnung und zwei beliebige Secanten a und b kann stets eine Fläche II. Ordnung gelegt werden. Wenn a und b in einem Punkte P der Curve k sich schneiden, so ist die Fläche II. Ordnung eine Kegelfläche, durch welche k aus P projecirt wird. Liegen a und b nicht in einer Ebene, so ist die Fläche II. Ordnung eine Regelfläche, und die eine Regelschaar derselben, zu welcher auch a und b gehören, besteht nur aus Secanten der Curve k , während die andere Regelschaar keine Secanten enthalten kann. Jeder Strahl dieser zweiten Schaar hat einen Punkt mit der Raumcurve gemein.“

Da jeder Strahl der ersten Schaar mit jedem Strahle der zweiten in einer Ebene liegt (I. Abth. pag. 97), und diese Ebene im Allgemeinen und höchstens drei Punkte mit der Raumcurve gemein hat, von denen nur zwei auf der Secante (dem Strahle der ersten Schaar) liegen können, so muss der Strahl der zweiten Schaar den dritten Schnittpunkt enthalten. Er kann aber keine Secante der Curve sein, weil er von unzählig vielen Secanten, nämlich von Strahlen der ersten Schaar, ausserhalb der Curve geschnitten wird und durch keinen ausserhalb gelegenen Punkt mehr als eine Secante hindurchgeht.

Die Strahlen der zweiten Schaar werden aus den Secanten a und b durch zwei projectivische Ebenenbündel projecirt; oder:

„Die Raumcurve III. Ordnung wird aus beliebigen zwei ihrer Secanten durch projectivische Ebenenbündel projecirt, nämlich jeder Punkt der Curve durch zwei homologe Ebenen der Bündel.“

Dieser Satz gilt offenbar auch dann, wenn die Secanten a und b sich auf der Curve schneiden, also mit derselben in einer Kegelfläche II. Ordnung liegen. Eine Umkehrung desselben werden wir später kennen lernen. Wir wollen ihn zunächst zu einer linearen Construction von Schmiegungs- oder Krümmungs-Ebenen (pag. 22) der Curve benutzen.

Sei a die Tangente der Curve im Punkte A und b eine beliebige andere Secante, ferner P irgend ein von A verschiedener Curvenpunkt. Dann beschreiben also die Ebenen $\overline{aP}$ und $\overline{bP}$ zwei collineare Ebenenbündel um a und b , wenn P auf der Curve

sich fortbewegt. Nähert sich P unbegrenzt dem Punkte A , so geht $\overline{aP}$ über in die Schmiegungs-Ebene dieses Punktes und $\overline{bP}$ nähert sich unbegrenzt der Ebene $\overline{bA}$. Sobald also die projectivische Verwandtschaft der Ebenenbüschel a und b durch drei Paare entsprechender Ebenen festgestellt ist, finden wir die Schmiegungs-Ebene im Punkte A , indem wir zu der Ebene $\overline{bA}$ die entsprechende Ebene des Büschels a construiren.

Wenn die Secante b durch den Punkt A hindurchgeht, erhalten wir eine etwas abweichende Construction. Nähert sich wieder der bewegliche Punkt P unbegrenzt dem Punkte A , so geht $\overline{AP}$ über in die Tangente a . Die Ebene $\overline{bP}$ nähert sich unbegrenzt der Ebene $\overline{ba}$, gleichzeitig aber die Ebene $\overline{aP}$ der durch a gehenden Berührungs-Ebene derjenigen Kegelfläche II. Ordnung, welche die Ebenenbüschel a und b mit einander erzeugen. Oder:

„Die Schmiegungs-Ebene eines beliebigen Curvenpunktes A geht durch die Tangente a dieses Punktes, und berührt in derselben die Kegelfläche II. Ordnung, durch welche die Raumcurve III. Ordnung aus dem Punkte A projecirt wird.“

Wir wollen ferner auf Grund des obigen wichtigen Satzes durch lineare Construction und ohne Hülfe der collinearen Strahlenbündel die Aufgabe lösen:

„Aus einem beliebigen Punkte K des Raumes eine Secante an die Raumcurve III. Ordnung zu ziehen.“

Wir verbinden K mit einem beliebigen Punkte P der Curve durch eine Gerade g , und legen durch g zwei Ebenen, welche die Raumcurve in je zwei von P verschiedenen Punkten schneiden. Die Verbindungslinien a und b dieser Punktenpaare liegen mit der Raumcurve auf einer Regelfläche, welcher auch die Gerade g angehört (I. Abth. pag. 99); denn g hat die drei Punkte ga , gb und P mit der Regelfläche gemein. Von derjenigen Regelschaar dieser leicht zu construierenden Fläche, zu welcher auch a und b gehören, geht demnach ein Strahl durch den Punkt K , und dieser Strahl ist die gesuchte Secante. Auch wenn letztere eine uneigentliche ist, führt die angegebene Construction stets zum Ziel. Beiläufig folgt:

„Durch eine Raumcurve k III. Ordnung und eine Gerade g , welche die Curve in einem Punkte P schneidet, aber keine Secante ist, kann eine einzige Regelfläche gelegt werden. Die Regelschaar dieser Fläche besteht aus Secanten der Curve, der anderen gehört g an.“

Durch die Raumcurve III. Ordnung sind also deren eigentliche und uneigentliche Secanten völlig bestimmt; und je zwei collineare Strahlenbündel, welche die Raumcurve erzeugen, müssen auch das Secantensystem erzeugen. Somit ist folgender Hauptsatz über derartige Secantensysteme bewiesen:

Ein Secantensystem wird aus je zwei Punkten seiner Ordnungscurve durch zwei collineare Strahlenbündel projecirt; nämlich jeder dritte Punkt der Ordnungscurve durch zwei homologe Strahlen der Bündel, und jeder Strahl des Systemes durch zwei homologe Ebenen.

Die Mittelpunkte S und S_1 der ursprünglich angenommenen collinearen Bündel zeichnen sich mit anderen Worten durch Nichts aus vor den übrigen Punkten der Ordnungscurve; was von ihnen bewiesen wird, gilt auch von jedem anderen Curvenpunkte.

Jede durch S gelegte Ebene enthält mindestens einen Strahl des Systemes; sie wird in demselben von der entsprechenden Ebene des Bündels S_1 geschnitten. Hat die Ebene drei Punkte mit der Ordnungscurve gemein, so gehören die drei Verbindungslinien dieser Punkte zu dem Secantensystem; enthält die Ebene ausser S nur noch einen Punkt P der Ordnungscurve, so berührt sie dieselbe in S oder P , und enthält nur zwei Strahlen des Systemes, nämlich $\overline{SP}$ und die Tangente des Berührungspunktes. Weil nun S ein beliebiger Punkt der Ordnungscurve ist, und letztere mit jeder Ebene mindestens einen Punkt gemein hat; weil ferner jeder Schnittpunkt von zwei Secanten auf der Ordnungscurve liegt, so ergibt sich:

„Jede Ebene enthält genau so viele Secanten wie Punkte einer Raumcurve III. Ordnung, also mindestens eine Secante und höchstens drei.“

Eine Raumcurve III. Ordnung kann auch durch Regelflächen erzeugt werden, wie der folgende Satz lehrt:

„Zwei Regelflächen R und R_1 oder eine Regelfläche R und eine Kegelfläche K II. Ordnung, welche sich in einem Strahle a schneiden, haben im Allgemeinen noch eine Raumcurve k III. Ordnung mit einander gemein, von welcher a eine Secante ist.“

Jede beliebig durch a gelegte Ebene schneidet die Flächen in je einem von a verschiedenen Strahle. Weisen wir je zwei solche Strahlen einander als entsprechende zu, so sind die beiden Regelschaaren R und R_1 , denen der Strahl a nicht angehört, oder auch die Regelschaar R und die Kegelfläche K projectivisch auf ein-

ander bezogen, weil beide auf den Ebenenbüschel a perspectivisch bezogen sind. Je zwei einander zugewiesene Strahlen der Flächen schneiden sich nun in einem Punkte der Curve k und alle diese Schnittpunkte werden aus einem beliebigen P unter ihnen durch die Strahlen einer Kegelfläche II. Ordnung projecirt. Nämlich die beiden projectivischen Strahlengebilde R und R_1 oder R und K werden aus dem Punkte P durch zwei projectivische Ebenenbüschel I. Ordnung projecirt, welche die erwähnte Kegelfläche II. Ordnung erzeugen. Die Curve k ist also eine Raumcurve III. Ordnung, wenn nicht eine oder auch jede solche durch sie gelegte Kegelfläche II. Ordnung in Strahlenbüschel I. Ordnung zerfällt, was möglich ist. In diesem besonderen Falle kann die Raumcurve III. Ordnung in eine Gerade und einen Kegelschnitt oder auch in drei Gerade zerfallen, oder sich auf eine oder zwei Gerade reduciren. — Weil jeder beliebige Strahl g der Regelschaar R nur einen Punkt mit der Raumcurve k gemein hat, ohne k zu berühren, und weil durch g und k nur eine einzige Regelfläche hindurchgelegt werden kann, deren zweite Regelschaar aus Secanten der Curve bestehen muss, so ist auch a eine solche Secante.

„Drei projectivische Ebenenbüschel, deren Axen a, a_1, a_2 nicht durch einen und denselben Punkt hindurchgehen, erzeugen im Allgemeinen eine Raumcurve k III. Ordnung, von welcher a, a_1, a_2 Secanten sind. In jedem Punkte von k schneiden sich drei homologe Ebenen der Büschel.“

Nämlich der Büschel a erzeugt mit jedem der beiden anderen Büschel eine Kegel- oder auch eine Regelfläche, und die beiden so entstehenden Flächen haben die Gerade a entsprechend gemein. Der Satz ist hiedurch auf den vorhergehenden zurückgeführt. Er kann als Umkehrung eines früher (pag. 72) bewiesenen Satzes betrachtet werden. Durch ihn lösen wir die Aufgabe:

„Eine Raumcurve III. Ordnung zu construiren, von welcher drei Punkte P, Q, R und drei Secanten a, a_1, a_2 gegeben sind, die weder durch jene Punkte hindurchgehen, noch deren Verbindungslinien schneiden.“

Wir beziehen nämlich die Ebenenbüschel a, a_1, a_2 projectivisch so auf einander, dass in jedem der Punkte P, Q, R drei homologe Ebenen der Büschel sich schneiden. Durch die Ebenenbüschel wird alsdann die gesuchte Curve erzeugt. Bilden die Secanten a, a_1, a_2 ein Dreieck, so geht die Raumcurve auch durch die

Eckpunkte desselben, also im Ganzen durch sechs willkürlich gegebene Punkte.

„Wenn eine Regelschaar oder Kegelfläche II. Ordnung und „ein Ebenenbüschel I. Ordnung projectivisch auf einander bezogen sind, so erzeugen sie im Allgemeinen eine Raumcurve „III. Ordnung, von welcher die Axe a des Ebenenbüschels eine „Secante ist.“

Seien a_1 und a_2 zwei beliebige, zu dem Strahlengebilde perspektivische Ebenenbüschel, so sind dieselben projectivisch zu dem Ebenenbüschel a und erzeugen mit demselben die Raumcurve. Auch hier übergehe ich die Ausnahmefälle.

Noch möge der folgende Satz hier Platz finden:

„Durch sechs Punkte S, S_1, A, B, C, D , von denen keine vier „in einer Ebene liegen, kann nur eine Raumcurve III. Ordnung gelegt werden.“

Denn die beiden Kegelflächen II. Ordnung, durch welche die Curve aus den Punkten S und S_1 projicirt wird, sind durch die Strahlen, welche jeden dieser Punkte mit den fünf übrigen verbinden, völlig bestimmt. Die Curve wird wohl am leichtesten construirt, indem man drei der sechs Punkte durch Secanten verbindet und wie bei der letzten Aufgabe verfährt. Zwei Raumcurven III. Ordnung können also höchstens fünf Punkte mit einander gemein haben, ohne zusammen zu fallen. — Ganz analog ist der Satz zu beweisen:

„Eine Raumcurve III. Ordnung ist völlig bestimmt durch fünf „ihrer Punkte und die Tangente in einem derselben, oder durch „vier Punkte und die Tangenten in zwei derselben, oder durch „drei Punkte und deren Tangenten.“

Denn sind z. B. A, B, C drei Punkte der Curve, und a, b, c die resp. Tangenten in diesen Punkten, so muss die Kegelfläche II. Ordnung, durch welche die Curve aus dem Punkte A projicirt wird, durch die drei Strahlen $a, \overline{AB}$ und $\overline{AC}$ hindurchgehen und in den letzteren beiden die resp. Ebenen $\overline{Ab}$ und $\overline{Ac}$ berühren. Dieselbe ist also völlig bestimmt, und ebenso die Kegelfläche II. Ordnung, durch welche die Curve aus B oder C projicirt wird.

Uebertragen wir jetzt die bisherigen Sätze auf das Strahlengebilde, welches zwei collineare ebene Systeme Σ und Σ_1 erzeugen. Wenn wir die speciellen Fälle, welche hierbei eintreten können, wieder unberücksichtigt lassen, so ergibt sich Folgendes:

„Zwei collineare ebene Systeme Σ und Σ_1 , welche weder per-

„spectivisch noch in derselben Ebene liegen und weder ihre
 „Schnittlinie noch einen Punkt derselben entsprechend gemein
 „haben, erzeugen ein System von Strahlen, welches von dem
 „bisher betrachteten wesentlich verschieden ist, ausserdem
 „aber einen Ebenenbüschel III. Ordnung. Jeder Strahl des
 „Systemes verbindet zwei homologe Punkte, jede Ebene des
 „Büschels III. Ordnung verbindet zwei homologe Gerade von
 „ Σ und Σ_1 mit einander. Wir wollen jeden Strahl des Systemes
 „eine Axe des Ebenenbüschels III. Ordnung, letzteren aber den
 „Ordnungsbüschel des Systemes von Strahlen nennen. In einer
 „beliebigen Ebene liegt im Allgemeinen nur eine Axe des
 „Büschels III. Ordnung; nur wenn die Ebene dem Büschel
 „selbst angehört, liegen in derselben unendlich viele Axen,
 „und diese bilden einen Strahlenbüschel II. Ordnung und sind
 „die Schnittlinien der gegebenen Ebene mit den übrigen Ebenen
 „des Büschels III. Ordnung. In jeder Ebene des Büschels
 „III. Ordnung giebt es eine Axe, durch welche keine zweite
 „Ebene des Büschels hindurchgeht; dieselbe heisst der Be-
 „rührungsstrahl der Ebene, und derjenige Punkt dieser Axe,
 „welcher auf keiner zweiten Axe liegt, heisst der Berührungs-
 „punkt der Ebene. Durch jeden Punkt des Raumes gehen
 „höchstens drei Ebenen des Büschels, und mindestens eine, so-
 „wie eben so viele Axen des Büschels. Der Ebenenbüschel
 „III. Ordnung wird von je zwei seiner Axen in projectivischen
 „geraden Gebilden geschnitten, nämlich jede Ebene des Büschels
 „in zwei homologen Punkten der geraden Gebilde. Das Axen-
 „system wird von je zwei Ebenen seines Ordnungsbüschels in
 „zwei collinearen ebenen Systemen geschnitten; nämlich jede
 „dritte Ebene des Ordnungsbüschels wird in zwei homologen
 „Strahlen und jeder Strahl des Axensystems in zwei homo-
 „logen Punkten der collinearen Systeme geschnitten. Drei
 „projectivische gerade Gebilde, deren Träger a, a_1, a_2 nicht
 „in einer Ebene liegen, erzeugen im Allgemeinen einen Ebenen-
 „büschel III. Ordnung, von welchem a, a_1, a_2 drei Axen sind;
 „ebenso ein gerades Gebilde und eine zu ihm projectivische
 „Regelschaar. Durch sechs Ebenen, von denen keine vier durch
 „einen Punkt gehen, kann nur ein Ebenenbüschel III. Ordnung
 „gelegt werden.“ U. s. w.

Wie bei den Kegelschnitten, so können wir auch bei den
 Raumcurven III. Ordnung mehrere Arten unterscheiden je nach der

Anzahl und Lage ihrer unendlich fernen Punkte. Wir können die Tangente eines unendlich fernen Punktes seine Asymptote, und die Schmiegungs-Ebene desselben seine Asymptoten-Ebene nennen. Aus jedem ihrer unendlich fernen Punkte wird die Raumcurve III. Ordnung durch eine Cylinderfläche II. Ordnung projicirt. Die Raumcurve wird von der unendlich fernen Ebene entweder in drei Punkten geschnitten, oder sie hat mit derselben nur einen Schnittpunkt gemein, oder sie wird von ihr in einem Punkte geschnitten und in einem anderen berührt, oder endlich die unendlich ferne Ebene schmiegt sich ihr in einem Punkte an. Wir erhalten demnach vier Arten von Raumcurven III. Ordnung, welchen Seydewitz folgende Namen gegeben hat:

- 1) Die räumliche Hyperbel. Sie hat drei unendlich ferne Punkte, deren Asymptoten und Asymptoten-Ebenen in endlicher Entfernung liegen. In ihr schneiden sich drei hyperbolische Cylinder, deren Asymptoten-Ebenen paarweise einander parallel sind.
- 2) Die räumliche Ellipse. Sie besitzt einen unendlich fernen Punkt mit einer Asymptote und einer Asymptoten-Ebene in endlicher Entfernung. Durch dieselbe kann nur ein einziger, und zwar ein elliptischer Cylinder gelegt werden.
- 3) Die parabolische Hyperbel besitzt zwei unendlich ferne Punkte, von deren Asymptoten die eine unendlich fern liegt, die andere dagegen nebst den beiden Asymptoten-Ebenen in endlicher Entfernung. Durch die parabolische Hyperbel kann ein parabolischer und ein hyperbolischer Cylinder gelegt werden.
- 4) Die räumliche Parabel enthält nur einen unendlich fernen Punkt, dessen Asymptote und Asymptoten-Ebene unendlich fern liegen. Durch dieselbe kann nur ein einziger, nämlich ein parabolischer Cylinder gelegt werden.

Eilfter Vortrag.

Projectivische Beziehungen und Polarität der Raumcurven und Ebenenbüschel dritter Ordnung.

Die meisten bisher aufgestellten Sätze über Raumcurven und Ebenenbüschel III. Ordnung lassen sich weit einfacher aussprechen, wenn wir den Begriff der projectivischen Verwandtschaft auf diese Gebilde ausdehnen. Zu dem Ende stellen wir folgende Definition auf:

Vier Punkte einer Raumcurve k III. Ordnung sollen vier harmonische Punkte genannt werden, wenn sie aus irgend einer und folglich (pag. 72) aus jeder Secante der Curve durch vier harmonische Ebenen, also auch aus jedem Punkte S der Curve durch vier harmonische Strahlen der Kegelfläche $S k$ II. Ordnung projecirt werden.

Vier Ebenen eines Büschels K III. Ordnung sollen vier harmonische Ebenen genannt werden, wenn sie von irgend einer und folglich von jeder Axe des Büschels in vier harmonischen Punkten, also auch von jeder Ebene σ des Büschels in vier harmonischen Strahlen des Büschels σK II. Ordnung geschnitten werden.

Ausserdem wollen wir die Raumcurve und den Ebenenbüschel III. Ordnung mit dem Namen Elementargebilde III. Ordnung bezeichnen. Auch auf sie finden dann ohne Weiteres die allgemeinen Definitionen und Sätze Anwendung, welche früher (I. Abth. pag. 103 und 104) für die Elementargebilde I. und II. Ordnung ausgesprochen wurden; z. B.

„Zwei projectivische Raumcurven III. Ordnung, die in einander „liegen, haben entweder alle ihre Punkte, oder höchstens zwei „derselben entsprechend gemein.“

Die Raumcurve k III. Ordnung wird aus jeder Secante α durch einen zu k perspectivischen Ebenenbüschel und aus jedem ihrer Punkte S durch eine zu ihr perspectivische Kegelfläche $S k$ II. Ordnung projecirt. Zwei zu k perspectivische Ebenenbüschel α und α_1 erzeugen eine zu der Curve perspectivische Kegelfläche oder Regelschaar, je nachdem sie sich schneiden oder nicht. Viele

von den früheren Sätzen können jetzt wie folgt zusammengefasst werden:

*Alle Ebenenbüschel, Kegel-
flächen II. Ordnung und Regel-
schaaren, welche zu einer Raum-
curve III. Ordnung perspectivisch
liegen, sind zu einander projec-
tivisch.*

*Alle geraden Gebilde, Strahlen-
büschel II. Ordnung und Regel-
schaaren, welche zu einem Ebenen-
büschel III. Ordnung perspec-
tivisch liegen, sind zu einander
projectivisch.*

Sollen zwei Raumcurven k und k_1 III. Ordnung projectivisch so auf einander bezogen werden, dass den Punkten A, B, C von k die resp. Punkte A_1, B_1, C_1 von k_1 entsprechen, so beziehe man irgend zwei Ebenenbüschel, von denen der eine u zu der Curve k und der andere v_1 zu der Curve k_1 perspectivisch liegt, in der Weise projectivisch auf einander, dass den Ebenen $\overline{uA}, \overline{uB}, \overline{uC}$ des ersteren die resp. Ebenen $\overline{v_1A_1}, \overline{v_1B_1}, \overline{v_1C_1}$ des letzteren entsprechen. Je zwei Punkte der Curven entsprechen sodann einander, wenn sie durch zwei homologe Ebenen der Büschel projectirt werden. Die projectivischen Raumcurven sind zugleich homologe Gebilde von zwei collinearen räumlichen Systemen. Denn seien D, E, F drei neue Punkte der Curve k , denen in k_1 die Punkte D_1, E_1, F_1 entsprechen, so können wir zwei räumliche Systeme Σ und Σ_1 collinear so auf einander beziehen, dass den fünf Punkten A, B, C, D, E von Σ die resp. fünf Punkte A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 von Σ_1 entsprechen. Dem Ebenenbüschel $\overline{AB(CDEF)}$ entspricht dann der ihm projectivische Ebenenbüschel $\overline{A_1B_1(C_1D_1E_1F_1)}$, also auch der Ebene $\overline{ABF}$ von Σ die Ebene $\overline{A_1B_1F_1}$ von Σ_1 ; und ebenso lässt sich zeigen, dass jeder anderen Ebene von Σ , welche den Punkt F mit irgend zwei der Punkte A, B, C, D, E verbindet, diejenige Ebene von Σ_1 entspricht, durch welche F_1 mit den entsprechenden zwei der Punkte A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 verbunden wird. Da sonach der Punkt F von Σ als Schnittpunkt von drei jener Ebenen dem Punkte F_1 von Σ_1 als Schnittpunkt der homologen drei Ebenen entspricht, so muss auch der Curve k , auf welcher die sechs Punkte A, B, C, D, E, F liegen, die Curve k_1 entsprechen, welche die homologen sechs Punkte $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ mit einander verbindet; denn durch sechs Punkte des Raumes kann nur eine Raumcurve III. Ordnung gelegt werden.

Eine involutorische Raumcurve III. Ordnung wird aus jedem ihrer Punkte durch eine involutorische Kegelfläche II. Ordnung

projicirt, und je zwei einander zugeordnete Strahlen der letzteren liegen demnach mit einer Geraden g , welche durch den Mittelpunkt der Kegelfläche geht, aber nicht auf derselben enthalten ist, in einer Ebene (I. Abth. pag. 118). Je zwei einander zugeordnete Punkte der Raumcurve liegen also ebenfalls mit g in einer Ebene; und die Verbindungslinien dieser Punktenpaare gehören einer Regelschaar von Secanten an, von welcher g ein Leitstrahl ist. Wenn die involutorische Curve zwei Ordnungspunkte besitzt, so gehören die Tangenten derselben ebenfalls jener Regelschaar an; sie trennen in der Regelschaar die eigentlichen Secanten von den uneigentlichen. Beiläufig folgt mit Berücksichtigung früherer Sätze (pag. 72):

„Wird durch eine Raumcurve III. Ordnung eine Regelfläche „gelegt, so ist jeder Strahl der einen Regelschaar dieser Fläche „eine Secante der Curve, während jeder Strahl der zweiten „Regelschaar die Curve in einem einzigen Punkte schneidet. „Durch die Strahlen der ersten Schaar werden die Curven- „punkte involutorisch gepaart; und entweder ist jeder Strahl „dieser Schaar eine eigentliche Secante, oder zwei derselben „werden von der Curve berührt und trennen die eigentlichen „Secanten von den uneigentlichen.“

Zu anderen wichtigen Eigenschaften der Raumcurven und Ebenenbüschel III. Ordnung führen uns die Lehrsätze des Pascal und des Brianchon. Ich schicke folgenden Satz voraus:

„Eine Raumcurve III. Ordnung ist im Allgemeinen bestimmt, „wenn von ihr vier Secanten und zwei Punkte S und S_1 ge- „geben sind.“

Beziehen wir nämlich die Strahlenbündel S und S_1 collinear so auf einander, dass in jeder der vier Secanten zwei homologe Ebenen derselben sich schneiden, so erzeugen sie die Raumcurve. Damit die collineare Verwandtschaft auf eine einzige Art ausführbar sei, müssen die Punkte S und S_1 solche Lage haben, dass kein Strahl derselben von irgend drei der gegebenen Secanten geschnitten wird. Auch darf die Gerade $\overline{SS_1}$ keine der vier Secanten schneiden, weil sonst die Strahlenbündel S und S_1 eine Ebene entsprechend gemein haben. Bilden drei der gegebenen Secanten ein Dreieck, so geht die Raumcurve III. Ordnung durch die Eckpunkte desselben; die Curve ist also auch bestimmt und leicht construierbar, wenn von derselben fünf Punkte und eine Secante gegeben sind.

Wir wollen unter den vier Secanten eine bestimmte Reihenfolge a, b, a_1, b_1 festsetzen, so dass dieselben aus S, S_1 , und einem beliebigen Punkte S_2 der Raumcurve durch je ein Vierseit im Strahlenbündel projicirt werden, und zwar jedes der Secantenpaare a, a_1 und b, b_1 durch ein Paar Gegenseiten des Vierseits. Wir verbinden in jedem Vierseite die beiden Strahlen, in welchen die Gegenseiten sich paarweise schneiden, durch eine Ebene, und erhalten so in den collinearen Bündeln S, S_1, S_2 die resp. Ebenen $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$. Dieselben sind homologe Ebenen der Bündel, schneiden sich also in einer und derselben Secante s . Bewegt sich der Punkt S_2 auf der Raumcurve, so dreht sich daher die Ebene σ_2 um die Secante s . Hierauf gründet sich eine höchst einfache Construction der Raumcurve III. Ordnung:

„Seien von der Raumcurve III. Ordnung gegeben zwei Punkte S, S_1 und zwei Paare Secanten a, a_1 und b, b_1 . Wir legen „durch S einen Strahl, welcher von a und a_1 , und ~~einen~~ ^{den} „zweiten, welcher von b und b_1 geschnitten wird, und verbinden beide Strahlen durch eine Ebene σ . Ebenso legen „wir durch S_1 eine Ebene σ_1 , welche zwei durch S_1 gehende „und die resp. Secantenpaare a, a_1 und b, b_1 schneidende „Strahlen enthält, und bestimmen sofort die Schnittlinie s der „Ebenen σ und σ_1 . Jede durch s gehende Ebene σ_2 schneidet „alsdann die Secantenpaare a, a_1 und b, b_1 in zwei Punkten- „paaren A, A_1 und B, B_1 , deren Verbindungslinien $\overline{AA_1}$ und „ $\overline{BB_1}$ sich in einem Punkte S_2 der Raumcurve III. Ordnung „treffen.“

Von der Richtigkeit dieser Construction überzeugt man sich auch leicht, indem man bemerkt, dass in der Secante s und der gesuchten Raumcurve III. Ordnung sich die beiden Regelflächen schneiden, welche s mit a, a_1 , und mit b, b_1 verbinden.

Sei nun der Raumcurve k III. Ordnung ein Sechseck eingeschrieben, so wird dasselbe aus jedem beliebigen Curvenpunkte S durch ein Sechskant projicirt, welches der Kegelfläche Sk II. Ordnung eingeschrieben ist. Mit Berücksichtigung des Vorhergehenden ergibt sich also aus dem Lehrsatz des Pascal:

„Jedes der Raumcurve III. Ordnung eingeschriebene Sechseck „wird aus einem beliebigen Curvenpunkte S durch ein Sechskant projicirt, dessen drei Paar Gegenseiten sich in drei auf „einer Ebene σ gelegenen Geraden schneiden. Bewegt sich S auf „der Raumcurve, so dreht sich die Ebene σ um eine feste Secante s .“

Diese Secante s ist schon durch zwei Paar Gegenseiten a, a_1 und b, b_1 des Sechsecks völlig bestimmt; in ihr schneiden sich auch die beiden Regelflächen, durch welche die Raumcurve mit den Secantenpaaren a, a_1 und b, b_1 verbunden wird.

Von den übrigen Sätzen, die aus dem Lehrsatz des Pascal folgen, nenne ich nur denjenigen über das eingeschriebene Dreieck (I. Abth. pag. 67):

„Sei $SABC$ ein der Raumcurve k III. Ordnung eingeschriebenes Tetraeder, und seien S_1, A_1, B_1, C_1 die Punkte, in welchen die Tangenten der resp. vier Eckpunkte S, A, B, C von den gegenüber liegenden Flächen des Tetraeders geschnitten werden; dann bilden die Punkte S_1, A_1, B_1, C_1 ein zweites Tetraeder, welches dem ersteren eingeschrieben und zugleich umschrieben ist. Die Ebene $A_1 B_1 C_1$ z. B. geht durch S ; sie dreht sich um eine feste Secante s , wenn S sich auf der Curve k fortbewegt, und die Punkte A, B, C ihre Lage nicht ändern.“

Nämlich das Dreieck ABC wird aus S durch ein Dreikant projicirt, welches der Kegelfläche Sk II. Ordnung eingeschrieben ist, und die Tangenten der Punkte A, B, C werden durch die Berührungs-Ebenen der drei Kanten SA, SB, SC projicirt. Die drei Strahlen SA_1, SB_1, SC_1 , in welchen die Seiten des Dreikantes von den Berührungs-Ebenen der ihnen gegenüber liegenden Kanten geschnitten werden, müssen desshalb in einer Ebene $A_1 B_1 C_1$ liegen. Vertauschen wir S mit einem anderen Curvenpunkte S^1 , so erhalten wir statt $A_1 B_1 C_1$ eine andere Ebene $A_1^1 B_1^1 C_1^1$; diese beiden Ebenen schneiden sich aber in einer Secante s , weil sie in den collinearen Strahlenbündeln, durch welche die Raumcurve III. Ordnung und ihr Secantensystem aus den Punkten S und S^1 projicirt werden, einander entsprechen.

Von diesem Satze lässt sich eine sehr wichtige Anwendung auf die Schmiegungs-Ebenen einer Raumcurve III. Ordnung machen. Wir bezeichnen mit a, b, c die Tangenten AA_1, BB_1, CC_1 der Punkte A, B, C , und mit P den Punkt, in welchem die Secante s von der Ebene ABC geschnitten wird *). Dann muss, wie soeben bewiesen, die Schnittlinie der Ebenen $SB C$ und Sa mit der Secante s in einer Ebene liegen, wo auch der Punkt S auf der Curve sich befinden

*) Die Secante s kann nicht in die Ebene ABC hineinfallen, weil diese höchstens drei Secanten (AB, BC und CA) enthalten kann.

möge. Nähert sich nun S unbegrenzt dem Punkte A , so geht die Ebene Sa über in die Schmiegungs-Ebene des Punktes A , und $SB C$ geht über in die Ebene ABC ; und die Schnittlinie dieser beiden Ebenen muss mit AP zusammenfallen, weil sie die Gerade s fortwährend schneiden soll. Ganz auf dieselbe Weise ergibt sich, dass auch die Schmiegungs-Ebenen der Punkte B und C durch den Punkt P hindurchgehen müssen; d. h.:

Die Schmiegungs-Ebenen von drei beliebigen Punkten A, B, C einer Raumcurve III. Ordnung schneiden sich in einem Punkte P , der mit A, B und C in einer Ebene liegt.

Unmittelbar folgt hieraus:

„Durch keinen Punkt P des Raumes gehen mehr als drei Schmiegungs-Ebenen der Raumcurve III. Ordnung, also auch „durch keine Gerade mehr als zwei derselben.“

Denn gingen durch P die Schmiegungs-Ebenen von vier Curvenpunkten A, B, C, D , so müssten in der Ebene ABP auch die Punkte C und D liegen; was unmöglich ist, da die Ebene höchstens drei Punkte mit der Raumcurve III. Ordnung gemein haben kann. — Gewöhnlich wird diesem Satze eine etwas andere Fassung gegeben. Man nennt nämlich eine gewundene Curve, an welche durch keinen Punkt mehr als n Schmiegungs-Ebenen gelegt werden können, eine Curve n ter Classe, und sagt demnach:

„Die Raumcurve dritter Ordnung ist zugleich dritter Classe.“

Eine zweite unmittelbare Folgerung aus dem vorhin bewiesenen Satze wird durch die erste Hälfte des Doppelsatzes ausgesprochen:

Vier Punkte einer Raumcurve III. Ordnung bilden ein Tetraeder, ihre vier Schmiegungs-Ebenen ein zweites Tetraeder; jedes dieser Tetraeder ist dem anderen zugleich um- und eingeschrieben.

Vier Ebenen eines Ebenenbüschels III. Ordnung bilden ein Tetraeder, ihre vier Berührungspunkte ein zweites Tetraeder; jedes dieser Tetraeder ist dem anderen zugleich ein- und umgeschrieben.

Mittelst dieses Satzes kann in jedem Punkte einer Raumcurve III. Ordnung die Schmiegungs-Ebene construirt werden, sobald von drei Punkten die Schmiegungs-Ebenen bekannt sind. Ausserdem ergibt sich, dass die gegenseitige Lage von vier Punkten einer Raumcurve III. Ordnung und ihren vier Schmiegungs-Ebenen dieselbe ist, wie diejenige von vier Berührungspunkten eines Ebenenbüschels III. Ordnung und den zugehörigen vier Ebenen

desselben. Diese Bemerkung führt uns zu folgendem Hauptsatze über die Raumcurven und Ebenenbüschel III. Ordnung:

Die sämtlichen Schmiegungs-Ebenen einer Raumcurve k III. Ordnung bilden einen Ebenenbüschel III. Ordnung.

Die sämtlichen Berührungspunkte eines Ebenenbüschels III. Ordnung erfüllen eine Raumcurve III. Ordnung.

Seien α, β, γ die Schmiegungs-Ebenen der resp. Curvenpunkte A, B, C , und P ihr in $\overline{ABC}$ gelegener Schnittpunkt. Wenn alsdann C die Raumcurve k durchläuft, so beschreibt die Ebene $\overline{ABC}$ einen zu k perspectivischen Ebenenbüschel $\overline{AB}$; zugleich schneidet sie in jeder ihrer Lagen die Gerade $\alpha\beta$ in einem Punkte P , durch welchen jedesmal auch die Schmiegungs-Ebene γ des Punktes C hindurchgeht. Der von $\overline{ABC}$ beschriebene Ebenenbüschel $\overline{AB}$ ist also auch perspectivisch zu dem geraden Gebilde $\alpha\beta$, welches der Punkt $\alpha\beta\gamma$ oder P bei der gleichzeitigen Bewegung der Schmiegungs-Ebene γ beschreibt. Vertauschen wir nun A und B mit irgend zwei anderen festen Curvenpunkten A^1 und B^1 , und berücksichtigen wir, dass je zwei Ebenenbüschel $\overline{AB}$ und $\overline{A^1B^1}$, welche beide zu der Curve k perspectivisch liegen, zu einander projectivisch sind, so folgt:

„Durch die Schmiegungs-Ebenen einer Raumcurve III. Ordnung werden alle geraden Gebilde, in deren Trägern je zwei „(α, β oder α^1, β^1) dieser Schmiegungs-Ebenen sich schneiden, „projectivisch auf einander bezogen.“

Wählen wir von diesen projectivischen geraden Gebilden irgend drei, die nicht in einer Ebene liegen, so erzeugen dieselben die sämtlichen Schmiegungs-Ebenen; nämlich je drei homologe Punkte bestimmen eine Schmiegungs-Ebene. Andererseits wissen wir bereits, dass die drei geraden Gebilde einen Ebenenbüschel III. Ordnung erzeugen (pag. 77); folglich ist bewiesen, dass die Schmiegungs-Ebenen einer Raumcurve III. Ordnung einen Ebenenbüschel III. Ordnung bilden.

Dieser Satz und viele der früheren lassen eine sehr merkwürdige Analogie zwischen den Raumcurven III. Ordnung und den Kegelschnitten erkennen. Dieselbe wird noch auffallender dadurch, dass durch jede Raumcurve III. Ordnung ein Nullsystem bestimmt ist, gleichwie jeder Kegelschnitt als Ordnungcurve eines ebenen Polarsystems betrachtet werden kann. Nämlich:

Eine Raumcurve k III. Ordnung und der Ebenenbüschel, welcher derselben sich anschmiegt, können als zwei einander zugeordnete

Gebilde eines Nullsystems betrachtet werden, in welchem jedem Punkte der Curve seine Schmiegungs-Ebene und jede Tangente sich selbst zugeordnet ist. Die Raumcurve k soll eine Ordnungscurve des Nullsystems genannt werden, weil das letztere durch k völlig bestimmt ist.

Wenn dieser Satz richtig ist, so ist durch ihn der vorhergehende Satz zum zweiten Male bewiesen. Denn in zwei reciproken räumlichen Systemen entspricht jeder Raumcurve III. Ordnung ein Ebenenbüschel III. Ordnung; wenn also in einem Nullsystem der Raumcurve III. Ordnung derjenige Ebenenbüschel zugeordnet ist, welcher der Curve sich anschmiegt, so ist derselbe ein Büschel III. Ordnung.

Das Nullsystem, von welchem im Satze die Rede ist, kann aber auf folgende Art nachgewiesen werden. Seien A, B, C, D, E, F beliebige sechs Punkte der Raumcurve k , und $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ ihre resp. Schmiegungs-Ebenen. Dann können wir zwei räumliche Systeme Σ und Σ_1 reciprok so auf einander beziehen, dass den fünf Punkten A, B, C, D, E von Σ die resp. fünf Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ von Σ_1 entsprechen. Das gerade Gebilde $\overline{\alpha\beta}$ von Σ_1 entspricht dann dem Ebenenbüschel $\overline{AB}$ von Σ und ist ein Schnitt desselben, weil drei Punkte von $\overline{\alpha\beta}$, nämlich $\alpha\beta\gamma, \alpha\beta\delta$ und $\alpha\beta\varepsilon$, in den ihnen entsprechenden Ebenen $\overline{ABC}, \overline{ABD}$ und $\overline{ABE}$ des Büschels $\overline{AB}$ liegen (pag. 84). Aus demselben Grunde liegt jeder andere Punkt von Σ_1 , welchen irgend zwei der Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ mit einander gemein haben, auf der ihm entsprechenden Ebene von Σ . Zwei reciproke räumliche Systeme Σ und Σ_1 bilden nun entweder ein Nullsystem, so dass jeder Punkt von Σ_1 auf der ihm entsprechenden Ebene von Σ enthalten ist, oder die sämtlichen Punkte von Σ_1 , für welche dieses stattfindet, liegen auf einer Fläche II. Ordnung. Das letztere kann im vorliegenden Falle nicht eintreten, weil sonst diese Fläche II. Ordnung mit jeder von den fünf Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ vier Gerade gemein haben müsste, z. B. mit α die Geraden $\overline{\alpha\beta}, \overline{\alpha\gamma}, \overline{\alpha\delta}$ und $\overline{\alpha\varepsilon}$, was unmöglich ist. Folglich bilden die reciproken Systeme Σ und Σ_1 ein Nullsystem, und jedem beliebigen Punkte F der Raumcurve k ist eine durch ihn hindurchgehende Ebene φ^1 zugeordnet. Da F in der Ebene $\overline{ABF}$ liegt, so muss φ^1 durch den Pol dieser Ebene hindurchgehen, d. h. durch den Schnittpunkt der Geraden $\overline{\alpha\beta}$ mit der Ebene $\overline{ABF}$; durch denselben Punkt geht aber auch die Schmiegungs-Ebene φ des Punktes F hindurch, und ebenso müssen

die Geraden $\overline{\alpha\gamma}$, $\overline{\alpha\delta}$, $\overline{\alpha\varepsilon}$, $\overline{\beta\gamma}$ u. s. w. mit φ^1 dieselben Punkte gemein haben wie mit φ , und φ^1 muss also mit φ zusammenfallen. Jedem Curvenpunkte F ist demnach seine Schmiegungs-Ebene φ zugeordnet; und da die Tangente von F in φ liegt, so ist sie sich selbst zugeordnet und ein Leitstrahl des Nullsystemes.

Zwei collinearen Strahlenbündeln S und S_1 , welche die Raumcurve k und deren sämtliche Secanten erzeugen, sind in dem Nullsysteme zwei collineare ebene Systeme σ und σ_1 zugeordnet, welche den an k sich anschmiegenden Ebenenbüschel III. Ordnung und dessen sämtliche Axen erzeugen. Jeder Secante der Curve ist also eine Axe des Ebenenbüschels zugeordnet, jede Tangente gehört zu dem Secantensystem der Curve, also auch, da sie sich selbst zugeordnet ist, zum Axensystem des Ebenenbüschels III. Ordnung. Beiläufig ergibt sich hieraus:

„Die sämtlichen Tangenten einer Raumcurve III. Ordnung
„werden aus jedem Punkte S der Curve durch einen Ebenen-
„büschel II. Ordnung projecirt, und von jeder Schmiegungs-
„Ebene σ in einer Curve II. Ordnung geschnitten.“

Der erste Theil des Satzes wurde schon früher (pag. 71) bewiesen; aus ihm folgt der zweite Theil.

Die Raumcurve III. Ordnung und der sich anschmiegende Ebenenbüschel III. Ordnung sind als zwei einander zugeordnete Gebilde des Nullsystems auch projectivisch auf einander bezogen. Jedes dritte Gebilde, welches zu einem der ersteren projectivisch ist, muss deshalb auch zu dem anderen projectivisch sein.

Für die Raumcurve III. Ordnung gilt der Satz, dass dieselbe durch drei ihrer Punkte S , S_1 , A und die Tangenten und Schmiegungs-Ebenen von zwei derselben S , S_1 bestimmt ist. Denn aus jedem dieser beiden Punkte wird die Curve durch eine Kegelfläche II. Ordnung projecirt, von welcher sich sofort drei Strahlen und die Berührungs-Ebenen von zwei dieser Strahlen angeben lassen; diese beiden Kegelflächen sind also bekannt und sie schneiden sich in der Raumcurve. Der reciproke Satz würde lauten:

„Ein Ebenenbüschel III. Ordnung ist durch drei seiner Ebenen
„und die Berührungsstrahlen und Berührungspunkte von zwei
„derselben bestimmt.“

Gewöhnlich aber giebt man demselben folgende Fassung:

„Eine Raumcurve III. Ordnung ist durch zwei ihrer Punkte,
„deren Tangenten und Schmiegungs-Ebenen und eine dritte
„Schmiegungs-Ebene bestimmt.“

In ähnlicher Form wollen wir für einige früher bewiesene Sätze die reciproken Sätze aussprechen. Wir fassen dieselben zusammen wie folgt:

„Eine Raumcurve III. Ordnung ist im Allgemeinen bestimmt, wenn von ihr gegeben sind:

„1) sechs Schmiegungs-Ebenen; 2) fünf Schmiegungs-Ebenen und die Tangente in einer derselben; 3) vier Schmiegungs-Ebenen und die Tangenten in zwei derselben; 4) drei Schmiegungs-Ebenen und deren Tangenten; 5) zwei Schmiegungs-Ebenen und vier Axen (pag. 81); 6) drei Schmiegungs-Ebenen und drei Axen; 7) fünf Schmiegungs-Ebenen und eine Axe; u. s. w.“

Die Raumcurve oder vielmehr der sich anschmiegende Ebenenbüschel III. Ordnung kann in jedem der genannten Fälle leicht construirt werden. Sind z. B. im Falle 5) die Schmiegungs-Ebenen Σ , Σ_1 und die vier Axen a , b , c , d gegeben, so beziehen wir die ebenen Systeme Σ und Σ_1 collinear so auf einander, dass jede der Axen a , b , c , d zwei homologe Punkte von Σ und Σ_1 enthält; dann erzeugen die beiden collinearen Systeme den Ebenenbüschel III. Ordnung und dessen Axensystem. Die Ausnahmefälle, in welchen die Construction unmöglich ist oder die Curve in Gerade und Kegelschnitte zerfällt, ergeben sich überall von selbst.

Zwölfter Vortrag.

Conjugirte Punkte bezüglich einer Raumcurve dritter Ordnung.

Wir können die Theorie der Raumcurven III. Ordnung nicht abschliessen, ohne noch eine Haupt-Eigenschaft derselben gebührend hervorzuheben, von welcher wir später mehrfach Gebrauch machen werden. Wir haben bewiesen, dass sich in der Raumcurve III. Ordnung unendlich viele Regelflächen und Kegelflächen II. Ordnung schneiden; und zwar kann die Curve mit je zwei ihrer Secanten durch eine solche geradlinige Fläche II. Ordnung verbunden werden. Ich behaupte nun:

Die Polar-Ebenen eines beliebigen Punktes A in Bezug auf alle durch die Raumcurve k III. Ordnung gelegten Flächen II. Ordnung schneiden sich in einem und demselben Punkte A_1 , welcher auf der durch A gehenden Secante der Curve enthalten ist.

Ist A ein Punkt der Curve, so berührt seine Tangente a die Curve k und desshalb auch jede durch k gelegte Fläche II. Ordnung. Die sämtlichen Polar-Ebenen des Punktes A gehen folglich in diesem Falle durch die Tangente a , und jeder beliebige Punkt A_1 der letzteren kann als Schnittpunkt dieser Polar-Ebenen aufgefasst werden. Liegt dagegen A nicht auf der Raumcurve k , so kann durch A eine einzige Secante s an die Curve gelegt werden. Dieselbe kann zunächst eine eigentliche sein, welche zwei Punkte M und N mit der Raumcurve gemein hat; alsdann muss derjenige Punkt A_1 von s , welcher durch M und N harmonisch von A getrennt ist, auf allen jenen Polar-Ebenen enthalten sein. Die Secante s kann ferner in einem Punkte S die Curve k berühren; dann berührt sie in S auch jede durch k gelegte Fläche II. Ordnung, und die sämtlichen Polar-Ebenen von A schneiden sich im Punkte S , mit welchem in diesem Falle A_1 identisch ist. Unser Satz ist also nur noch für den letzten Fall zu beweisen, in welchem die Secante s eine uneigentliche ist.

Seien F und F_1 irgend zwei durch k gelegte Flächen II. Ordnung, von denen F eine Kegelfläche sein möge. Wir verbinden den Punkt A mit dem Mittelpunkte dieser Kegelfläche durch eine Gerade g , und suchen zu jedem Punkte von g die Polar-Ebene in Bezug auf F und F_1 . Wir erhalten auf diese Weise eine einzige Polar-Ebene γ bezüglich der Fläche F und einen Büschel g_1 von Polar-Ebenen in Bezug auf F_1 ; letzterer ist projectivisch zu dem geraden Gebilde g . Die sämtlichen Secanten, welche aus den Punkten des geraden Gebildes g an die Raumcurve III. Ordnung gezogen werden können, bilden eine zu g perspectivische Regelschaar, welche von der Ebene γ in einem zu g und folglich auch zum Ebenenbüschel g_1 projectivischen Punktgebilde I. oder II. Ordnung geschnitten wird. Wir wissen nun bereits, dass jede eigentliche Secante der Regelschaar mit γ einen Punkt gemein hat, welcher auch auf der ihm entsprechenden Ebene von g_1 liegt; jenes Punktgebilde muss desshalb zu dem Ebenenbüschel g_1 perspectivische Lage haben, weil unendlich viele Punkte desselben auf den ihnen entsprechenden Ebenen liegen. Durch den Punkt A_1 , in welchem die Secante $\overline{AA_1}$ oder s von der Ebene γ ge-

schnitten wird, geht folglich auch die Polar-Ebene des Punktes A in Bezug auf jede beliebige, durch k gelegte Fläche F_1 II. Ordnung.

Die zu g perspectivische Secantenschaar wird von der Ebene γ im Allgemeinen in einer Curve II. Ordnung geschnitten, welche durch den Mittelpunkt der Kegelfläche F hindurchgeht. Nur wenn g in der Schmiegungs-Ebene dieses Mittelpunktes liegt, und folglich die Tangente des letzteren zu der Secantenschaar gehört, zerfällt jene Curve II. Ordnung in zwei Gerade, von denen eine jene Tangente und somit die andere g^1 ein Leitstrahl der Secantenschaar ist. Da γ die Polar-Ebene von g ist in Bezug auf die Kegelfläche F , so muss nämlich γ die Berührungsstrahlen der beiden aus g an F gelegten Berührungs-Ebenen enthalten, und einer derselben ist jene Tangente der Raumcurve III. Ordnung.

Wir wollen der Einfachheit wegen zwei Punkte in Hinsicht auf die Raumcurve k III. Ordnung einander conjugirt nennen, wenn sie wie A und A_1 in Bezug auf jede durch k gelegte Fläche II. Ordnung einander conjugirt sind. Ebenso heissen zwei Ebenen in Hinsicht auf einen Ebenenbüschel III. Ordnung einander conjugirt, wenn sie in Bezug auf jede dem Ebenenbüschel eingeschriebene Regelfläche oder Curve II. Ordnung einander conjugirt sind. Aus unserer Beweisführung folgt sodann:

Jede Verbindungslinie von zwei Punkten A und A_1 , welche hinsichtlich einer Raumcurve k III. Ordnung einander conjugirt sind, ist eine Secante von k . Schneidet die Secante $\overline{AA_1}$ die Curve in zwei Punkten M und N , so sind durch diese die Punkte A und A_1 harmonisch getrennt. Berührt $\overline{AA_1}$ die Curve, so fällt einer der Punkte A und A_1 mit dem Berührungspunkte zusammen. Ein Punkt der Raumcurve ist jedem Punkte seiner Tangente, also auch sich selbst conjugirt. Die Punkte einer Secante sind involutorisch gepaart, wenn je zwei conjugirte Punkte der-

Jede Schnittlinie von zwei Ebenen α und α_1 , welche hinsichtlich eines Ebenenbüschels III. Ordnung einander conjugirt sind, ist eine Axe des Büschels. Gehen durch $\alpha\alpha_1$ zwei Ebenen μ und ν des Ebenenbüschels III. Ordnung, so sind die Ebenen α und α_1 durch μ und ν harmonisch getrennt. Ist $\alpha\alpha_1$ ein Berührungsstrahl des Büschels III. Ordnung, so fällt eine der Ebenen α und α_1 mit der durch $\alpha\alpha_1$ gehenden Ebene des Büschels zusammen. Eine Ebene des Büschels ist jeder Ebene ihres Berührungsstrahles, also auch sich selbst conjugirt. Die Ebenen

selben einander zugeordnet werden.

einer Axe sind involutorisch gepaart, wenn je zwei conjugirte Ebenen derselben einander zugeordnet werden.

„Schneidet eine Gerade g die Raumcurve III. Ordnung in einem einzigen Punkte P , so liegen alle diejenigen Punkte, welche den Punkten von g conjugirt sind, im Allgemeinen auf einer durch P gehenden Curve II. Ordnung, dem Punkte P aber sind alle Punkte seiner Tangente p conjugirt. Daraus folgt, dass alle Polaren der Geraden g bezüglich der Flächen II. Ordnung, welche durch die Raumcurve gelegt werden können, sowohl die Curve II. Ordnung als auch die Tangente p schneiden müssen.“

„Nur dann, wenn die Gerade g in der Schmiegungs-Ebene des Punktes P liegt, sind ihren Punkten diejenigen einer anderen Geraden g^1 conjugirt, von welcher die Raumcurve in einem Punkte P^1 geschnitten wird. Die Gerade g^1 liegt mit der Tangente des Punktes P in einer Ebene γ , und ebenso g mit der Tangente von P^1 . Auch muss g^1 in der Schmiegungs-Ebene des Punktes P^1 liegen, weil sonst den Punkten von g^1 nicht diejenigen der Geraden g , sondern die Punkte einer Curve II. Ordnung conjugirt sein würden.“

Sei l eine ganz beliebige Gerade und seien l_1, l_2, l_3 ihre Polaren in Bezug auf irgend drei, durch die Raumcurve gelegte Flächen II. Ordnung. Dann bilden die Polaren der sämtlichen Punkte von l drei Ebenenbüschel l_1, l_2, l_3 , welche zu dem geraden Gebilde l und folglich auch zu einander projectivisch sind, also *in Bezug auf die 3 Flächen 2. O.* im Allgemeinen eine Raumcurve III. Ordnung erzeugen. Von letzterer sind l_1, l_2, l_3 Secanten, und jeder Punkt dieser neuen Raumcurve III. Ordnung ist einem Punkte von l conjugirt; also:

„Diejenigen Punkte, welche hinsichtlich einer Raumcurve k III. Ordnung den Punkten einer beliebigen Geraden l conjugirt sind, liegen im Allgemeinen auf einer zweiten Raumcurve III. Ordnung, zu deren Secanten alle Polaren von l bezüglich der durch k gelegten Flächen II. Ordnung gehören.“

Nur wenn l eine Secante der Raumcurve k ist oder mit k einen Punkt P gemein hat, erleidet dieser Satz die Ausnahmen, welche in den vorhergehenden Sätzen angegeben sind.

Wird die Raumcurve k als Ordnungscurve eines Nullsystemes betrachtet, ist sie also dem Ebenenbüschel K III. Ordnung zu-

geordnet, welcher ihr sich anschmiegt, so müssen je zwei Punkten, welche hinsichtlich der Curve k einander conjugirt sind, zwei hinsichtlich des Büschels K einander conjugirte Ebenen zugeordnet sein. Hiernach können zu den letzten Sätzen leicht die reciproken gebildet werden. Ich erwähne nur folgenden Satz:

„Zu jeder Geraden g , welche die Raumcurve k in einem Punkte P schneidet und in der Schmiegungs-Ebene dieses Punktes liegt, kann eine Gerade g^1 construirt werden, welche ebenfalls von k in einem Punkte P^1 geschnitten wird und in der Schmiegungs-Ebene von P^1 liegt, und zwar so, dass nicht nur jedem Punkte von g ein Punkt von g^1 hinsichtlich der Curve k conjugirt ist, sondern auch jeder Ebene von g eine Ebene von g^1 hinsichtlich des Büschels K .“

Der erste Theil des Satzes wurde schon vorhin bewiesen; aus ihm folgt der letzte Theil, wenn man erwägt, dass g und g^1 in dem Nullsysteme sich selbst zugeordnet sind.

Die Theorie der conjugirten Punkte lässt noch viele schöne Anwendungen zu, von denen ich nur die folgende anführe:

„Den sämtlichen Punkten einer Ebene γ sind hinsichtlich der Raumcurve k die sämtlichen Punkte einer krummen Fläche Γ conjugirt. Dieselbe hat mit einer Geraden l , die nicht ganz in ihr liegt, höchstens drei Punkte gemein, wesshalb sie auch eine Fläche III. Ordnung genannt wird; denn den Punkten von l sind diejenigen einer Raumcurve III. Ordnung conjugirt, welche mit der Ebene γ höchstens drei Punkte gemein hat und nur in besonderen Fällen in Gerade und Kegelschnitte ausarten kann. Die Fläche Γ geht durch die Raumcurve k , weil γ von jeder Tangente dieser Curve ~~einen~~ Punkt enthält; sie geht ausserdem durch alle Raumcurven III. Ordnung, welche den Geraden der Ebene γ conjugirt sind. Ist A ein gemeinschaftlicher Punkt von γ und der Raumcurve k , so geht Γ durch die Tangente von A ; jeder durch A gehenden Geraden von γ ist eine Curve II. Ordnung conjugirt, welche auf der Fläche Γ III. Ordnung enthalten ist, und letztere kann sonach auch durch eine veränderliche Curve II. Ordnung beschrieben werden. Die Schmiegungs-Ebene des Punktes A wird von γ in einer Geraden geschnitten, welcher eine auf Γ gelegene Gerade conjugirt ist. Die Fläche Γ geht durch jede in γ enthaltene Secante der Raumcurve k .“

„Hat beispielsweise die Ebene γ drei Punkte A, B, C mit

den Berührungspunkten

„der Raumcurve k gemein, so schneidet sie die Fläche Γ in
 „den drei Secanten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$; auch muss Γ die Tan-
 „genten der Punkte A , B , C enthalten. Und wenn mit P
 „derjenige Punkt von γ bezeichnet wird, in welchen die Schmie-
 „gungs-Ebenen der Punkte A , B , C sich schneiden, so geht
 „die Fläche Γ III. Ordnung durch die drei Geraden, deren
 „Punkte denjenigen von $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ und $\overline{PC}$ conjugirt sind.
 „Diese drei Geraden müssen sich in dem zu P conjugirten
 „Punkte schneiden und in der zu γ conjugirten Ebene liegen. —
 „Schmiegt die Ebene γ sich der Raumcurve k an in einem
 „Punkte A , so ist die Fläche Γ eine geradlinige Fläche III. Ord-
 „nung, d. h. sie kann durch Bewegung einer Geraden beschrieben
 „werden.“

Diesen Bemerkungen über die vorliegende Fläche III. Ord-
 nung könnten noch manche andere hinzugefügt werden; sie er-
 geben sich unmittelbar aus den vorhergehenden Sätzen.

Ich schliesse diesen Vortrag mit dem Beweise des wichtigen
 Satzes:

*Eine Raumcurve k III. Ordnung kann mit einer Secante s
 durch unendlich viele geradlinige Flächen II. Ordnung verbun-
 den werden; durch jeden ausserhalb k und s gelegenen Punkt
 P geht eine einzige dieser Flächen, deren Gesammtheit ein
 Flächenbüschel heissen möge. Die Polar-Ebenen jedes belie-
 bigen Punktes A in Bezug auf alle Flächen des Büschels schneiden
 sich in einer und derselben Geraden.*

Durch den Punkt P geht eine Secante p der Curve k , und p bestimmt
 mit der Secante s eine durch k gehende Regelfläche oder Kegelfläche
 II. Ordnung, welche dem Flächenbüschel angehört und den Punkt
 P enthält. Um auch den letzten Theil des Satzes zu beweisen,
 unterscheiden wir drei Fälle. Zunächst möge A auf der Raum-
 curve k enthalten sein; dann schneiden sich in der Tangente von
 A die Polar-Ebenen dieses Punktes in Bezug auf alle durch k
 gelegten Flächen II. Ordnung. Liegt ferner der Punkt A auf
 der Secante s , durch welche alle Flächen des Büschels hindurch-
 gehen sollen, so berühren seine Polar-Ebenen in A die zugehörigen
 Flächen des Büschels und müssen desshalb sämmtlich durch die
 Secante s gehen. Wenn endlich der Punkt A weder auf der
 Curve k noch auf der Secante s liegt, so müssen seine sämmt-
 lichen Polar-Ebenen zunächst durch den ihm conjugirten Punkt
 A_1 hindurchgehen. Einen zweiten gemeinschaftlichen Punkt A_2

der Polar-Ebenen von A können wir in der Ebene $\overline{As}$ sofort construiren, falls diese Ebene weder durch die Secante $\overline{AA_1}$ hindurchgeht, noch die Raumcurve k in einem Punkte von s berührt und in einem zweiten schneidet. Denn die Ebene $\overline{As}$ schneidet alsdann die Raumcurve in einem Punkte M , welcher ausserhalb der Secanten $\overline{AA_1}$ und s liegt, und A_2 ist derjenige Punkt der Geraden $\overline{AM}$, welcher durch M und s harmonisch von A getrennt, also dem Punkte A conjugirt ist in Bezug auf alle Flächen des Büschels. Die Polar-Ebenen von A müssen folglich durch die Gerade $\overline{A_1A_2}$ gehen, und der Satz ist bewiesen für jeden Punkt A , dessen Secante $\overline{AA_1}$ nicht von s in einem Curvenpunkte geschnitten wird, und welcher auch nicht auf einer durch s gehenden Berührungs-Ebene der Curve k enthalten ist. Je nachdem s eine uneigentliche oder eigentliche Secante ist, müssen wir somit den Beweis noch führen für keine oder für diejenigen Punkte, welche auf den beiden Kegelflächen des Büschels oder auf den beiden durch s gehenden Berührungs-Ebenen von k enthalten sind.

Sei nun A auf einer dieser beiden Kegelflächen oder Berührungs-Ebenen gelegen, und g eine beliebige durch A gehende Gerade, seien ferner F_1, F_2, F_3 irgend drei Flächen des Büschels. Die Polar-Ebenen der sämtlichen Punkte von g hinsichtlich der Flächen F_1, F_2 und F_3 bilden drei zu dem geraden Gebilde g und folglich auch zu einander projectivische Ebenenbüschel g_1, g_2 und g_3 . Für unendlich viele Punkte der Geraden g ist nun schon der Satz bewiesen, dass ihre Polar-Ebenen hinsichtlich des Büschels in einer und derselben Geraden sich schneiden; also müssen die Ebenenbüschel g_1, g_2 und g_3 ein und dasselbe Strahlengebilde I. oder II. Ordnung mit einander erzeugen, und zwar im Allgemeinen eine Regelschaar, zu welcher die Ebenenbüschel perspectivisch liegen, und die Polar-Ebenen des Punktes A müssen ebenfalls in einer und derselben Geraden sich schneiden. Zugleich ergibt sich:

„Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden g , so beschreibt im Allgemeinen die Gerade, in welcher seine Polar-Ebenen in Bezug auf die Flächen des Büschels sich schneiden, eine Regelschaar; die Polaren der Geraden g sind Leitstrahlen dieser Regelschaar.“

Der Flächenbüschel wird von einer beliebigen Ebene in einem Büschel von Curven II. Ordnung geschnitten. Derselbe hat, wie aus dem soeben Bewiesenen sich ergibt, folgende Eigenschaften:

„Durch jeden Punkt der Ebene geht ein Kegelschnitt des
 „Büschels. Die Polaren jedes beliebigen Punktes in Bezug
 „auf sämtliche Kegelschnitte des Büschels gehen durch einen
 „und denselben Punkt. Wenn irgend zwei Kegelschnitte des
 „Büschels sich in irgend einem Punkte schneiden oder be-
 „rühren, so müssen in diesem Punkte alle Curven des Büschels
 „sich schneiden resp. berühren; denn ein solcher Punkt liegt
 „auf allen seinen Polaren, und diese vereinigen sich im letz-
 „teren Falle mit der gemeinschaftlichen Tangente der Curven.“

Andere Eigenschaften der Kegelschnittbüschel werden wir durch die geometrischen Verwandtschaften zweiten Grades kennen lernen.

Dreizehnter Vortrag.

Projectivische Verwandtschaft zwischen einem ebenen
 System und dem Secantensystem einer Raumcurve
 dritter Ordnung. Geometrische Verwandtschaften
 zweiten Grades.

Wir haben im eilften Vortrage der ersten Abtheilung zwischen den Curven, Kegelflächen, Strahlen- und Ebenenbüscheln II. Ordnung, den Regelschaaren und den Grundgebilden der ersten Stufe eine projectivische Verwandtschaft aufgestellt, welche uns zu vielen interessanten Eigenschaften dieser Elementargebilde geführt hat. In ähnlicher Weise können nun auch die Secantensysteme von Raumcurven III. Ordnung u. die Axensysteme von Ebenenbüscheln III. Ordnung auf einander und auf die Grundgebilde der zweiten Stufe projectivisch bezogen werden. Ich beschränke mich hier darauf, die projectivische Verwandtschaft zwischen dem Secantensystem einer Raumcurve k III. Ordnung und einem ebenen Systeme Σ_1 eingehend zu untersuchen.

Um nun jeder Secante der Curve k einen bestimmten Punkt von Σ_1 als entsprechenden zuzuweisen, projeciren wir zunächst das Secantensystem aus irgend zwei Punkten S und T der Curve durch zwei collineare Strahlenbündel, und beziehen auf diese das

ebene System Σ_1 reciprok. Alsdann entspricht zugleich jedem Punkte A_1 von Σ_1 diejenige Secante a von k , in welcher die beiden dem A_1 entsprechenden Ebenen der collinearen Bündel S und T sich schneiden. Und umgekehrt kann zu jeder Secante a von k der entsprechende Punkt A_1 von Σ_1 sofort gefunden werden, weil A_1 denjenigen beiden homologen Ebenen von S und T entspricht, welche in a sich schneiden. Einem geraden Gebilde g_1 von Σ_1 entsprechen in S und T zwei zu g_1 und folglich zu einander projectivische Ebenenbüschel, welche eine zu g_1 projectivische Kegelfläche II. Ordnung oder Regelschaar erzeugen, und zwar eine Kegelfläche II. Ordnung nur dann, wenn die beiden Strahlen von S und T , welche der Geraden g_1 von Σ_1 entsprechen, sich auf der Raumcurve k schneiden. Die Curve k wird aus S und ebenso aus T durch eine Kegelfläche II. Ordnung projecirt, welcher in Σ_1 ein Strahlenbüschel II. Ordnung, also der Tangentenbüschel eines Kegelschnitts κ_1 entspricht; die Tangenten von k werden aus S durch die Berührungs-Ebenen jener Kegelfläche II. Ordnung projecirt, ihnen entsprechen desshalb die Punkte des Kegelschnitts κ_1 . Einem geraden Gebilde g_1 von Σ_1 entspricht also in dem Secantensystem nur dann eine Kegelfläche II. Ordnung, wenn es den Kegelschnitt κ_1 berührt; in jedem anderen Falle entspricht ihm eine Regelfläche, d. h. die eine Regelschaar dieser Fläche. Dreht sich das gerade Gebilde g_1 in Σ_1 um einen festen Punkt A_1 , so beschreibt gleichzeitig die ihm entsprechende Fläche II. Ordnung einen Flächenbüschel; denn sie ändert in der Weise ihre Lage, dass sie stets durch die Raumcurve k und eine feste, dem A_1 entsprechende Secante a hindurchgeht. Umgekehrt entspricht jeder durch k gehenden Kegelfläche II. Ordnung oder Regelfläche eine Gerade in Σ_1 und jedem durch k gehenden Flächenbüschel ein Strahlenbüschel I. Ordnung. Denn seien a und b irgend zwei Secanten von k , welche einer solchen Fläche II. Ordnung angehören und resp. A_1 und B_1 die entsprechenden Punkte von Σ_1 ; dann muss jene Fläche II. Ordnung mit derjenigen Fläche identisch sein, welche dem geraden Gebilde $\overline{A_1 B_1}$ entspricht, weil durch die Raumcurve III. Ordnung und zwei ihrer Secanten, wie a und b , nur eine einzige Fläche II. Ordnung gelegt werden kann.

Kurz zusammengefasst lauten die bisherigen Ergebnisse wie folgt:

„Das Secantensystem der Raumcurve k III. Ordnung und das

„ebene System Σ_1 sind so auf einander bezogen, dass jeder „Secante von k ein einziger Punkt von Σ_1 entspricht, jeder „durch k gelegten Fläche II. Ordnung ein zu ihr projectivisches „gerades Gebilde von Σ_1 und jedem Büschel solcher Flächen „II. Ordnung ein Büschel von geraden Gebilden. Den Tan- „genten und Punkten der Raumcurve k entsprechen in Σ_1 die „Punkte und Tangenten eines Kegelschnitts κ_1 . Einem ge- „raden Gebilde g_1 von Σ_1 entspricht in dem Secantensystem eine „zu g_1 projectivische Kegelfläche II. Ordnung oder Regelschaar, „je nachdem g_1 den Kegelschnitt κ_1 berührt oder nicht be- „rührt. Jedem ausserhalb κ_1 gelegenen Punkte von Σ_1 ent- „spricht demnach eine eigentliche Secante von k , denn durch „diese Secante lassen sich zwei zu k perspectivische Kegel- „flächen II. Ordnung legen; jedem innerhalb κ_1 gelegenen „Punkte von Σ_1 entspricht dagegen eine uneigentliche Secante „von k , welche mit k keinen Punkt gemein hat, weil durch „den innerhalb κ_1 gelegenen Punkt keine Tangente an κ_1 „gezogen werden kann.“

Wir wollen nun in Σ_1 einen beliebigen Kegelschnitt φ_1 an- nehmen, und die gegenseitige Lage der sämtlichen Secanten untersuchen, welche den Punkten von φ_1 entsprechen. In den zu Σ_1 reciproken Strahlenbündeln S und T entsprechen dem Kegelschnitt φ_1 zwei zu ihm und folglich auch zu einander pro- jectivische Ebenenbüschel II. Ordnung, durch welche alle jene Secanten erzeugt werden. Und da jeder stetigen Aufeinander- folge von Ebenen des einen Büschels eine stetige Aufeinander- folge von Ebenen des anderen entspricht, so müssen auch die Secanten stetig auf einander folgen, also auf einer Fläche F liegen. Zwei derartige Flächen können höchstens vier Secanten mit einander gemein haben, weil die ihnen entsprechenden Kegel- schnitte von Σ_1 höchstens vier gemeinschaftliche Punkte besitzen können. Fällt der Kegelschnitt φ_1 mit dem vorhin hervorge- hobenen Kegelschnitt κ_1 zusammen, so geht die geradlinige Fläche F durch die sämtlichen Tangenten der Raumcurve k . In jedem anderen Falle enthält F höchstens vier Tangenten von k , welche den gemeinschaftlichen Punkten von φ_1 und κ_1 entsprechen. Der Kegelschnitt φ_1 kann unendlich viele oder auch alle Tangenten des Kegelschnitts κ_1 in zwei Punkten schneiden; jedem solchen Punktenpaare entsprechen in der Fläche F zwei Secanten, welche sich in einem, der Tangente entsprechenden Punkte der Raum-

curve k schneiden, so dass die Fläche F in diesem Punkte sich selbst schneidet.

Einen speciellen Fall der Fläche F erhalten wir, wenn wir im Raum eine beliebige Gerade g annehmen, die keine Secante der Raumcurve k ist, und aus jedem Punkte von g eine Secante an die Curve k III. Ordnung ziehen. Schneidet g die Curve in einem Punkte P , so erfüllen alle diese Secanten die Kegelfläche Pk und eine Regelfläche, auf welcher auch die Gerade g liegt; und ihnen entsprechen in Σ_1 zwei gerade Gebilde, von denen das eine den Kegelschnitt κ_1 berührt. Hat aber die Gerade g keinen Punkt mit der Raumcurve III. Ordnung gemein, so können die von g ausgehenden Secanten folgendermassen mittelst der collinearen Strahlenbündel S und T construirt werden. Wir projectiren das gerade Gebilde g aus dem Punkte S durch einen Strahlenbüschel, und suchen zu diesem im Bündel T den entsprechenden Strahlenbüschel, welcher ebenfalls zu dem geraden Gebilde g projectivisch ist. Verbinden wir jeden Strahl des letzteren Büschels mit dem ihm entsprechenden Punkte von g durch eine Ebene, so erhalten wir einen Ebenenbüschel II. Ordnung. Jede Ebene desselben hat mit der entsprechenden Ebene des Bündels S einen Punkt von g und folglich die durch diesen Punkt gehende Secante der Raumcurve gemein, so dass die von g ausgehenden Secanten durch zwei projectivische Ebenenbüschel II. Ordnung S und T erzeugt werden. Sie erfüllen demnach eine geradlinige Fläche G und entsprechen den sämtlichen Punkten eines in Σ_1 liegenden Kegelschnitts γ_1 , welcher zu jenen Ebenenbüscheln und folglich auch zu dem geraden Gebilde g projectivisch ist. Durch die Gerade g können im Allgemeinen unzählig viele Ebenen gelegt werden, welche je drei Secanten der Raumcurve enthalten. Es giebt desshalb in Σ_1 unzählig viele Dreiecke, welche jenen Secanten-Dreiseiten entsprechen und folglich dem Kegelschnitt γ_1 eingeschrieben und zugleich dem Kegelschnitt κ_1 umschrieben sind. Zu beachten ist noch, dass die Mittelpunkte der Bündel S und T zwei ganz beliebige Punkte der Raumcurve k sind.

Die Flächen G und F haben nun, wie schon bemerkt, höchstens vier Secanten mit einander gemein, weil die ihnen entsprechenden Kegelschnitte γ_1 und φ_1 in Σ_1 höchstens vier gemeinschaftliche Punkte besitzen; und die beliebig gewählte Gerade g kann desshalb mit F höchstens vier, auf jenen Secanten liegende Punkte gemein haben, d. h. die Fläche F ist von der vierten

Ordnung. Wenn g die Raumcurve k in einem Punkte P schneidet, so hat sie ausser P höchstens zwei Punkte mit der Fläche F gemein; denn denjenigen Secanten, welche von g ausserhalb des Punktes P getroffen werden, entsprechen in Σ_1 die Punkte einer Geraden, welche mit dem Kegelschnitt φ_1 nicht mehr als zwei Punkte gemein hat, und es liegen sonach höchstens zwei dieser Secanten auf der Fläche F IV. Ordnung. Eine beliebige Secante s liegt entweder ganz auf der Fläche F , oder sie hat mit F keinen ausserhalb k befindlichen Punkt gemein, weil durch jeden solchen Punkt nur eine Secante an die Raumcurve k gezogen werden kann.

Unsere Untersuchungen führen also zu folgenden Ergebnissen:

„Die sämtlichen Secanten der Raumcurve k III. Ordnung,
 „welche den Punkten eines beliebigen Kegelschnitts φ_1 von Σ_1
 „entsprechen, werden aus jedem Punkte der Raumcurve durch
 „einen zu φ_1 projectivischen Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt.
 „Sie liegen in einer Fläche F IV. Ordnung, welche mit
 „einer beliebigen Geraden g , die nicht auf ihr liegt, höchstens
 „vier Punkte gemein hat, und wenn g die Raumcurve schneidet,
 „ausser dem Schnittpunkte höchstens noch zwei Punkte. Die
 „Fläche F wird von keiner Secante in einem ausserhalb der
 „Raumcurve k gelegenen Punkte geschnitten. Sie kann mit
 „derjenigen Fläche zusammenfallen, auf welcher die sämtlichen
 „Tangenten von k liegen; in einem anderen speciellen
 „Falle G kann sie von einer beweglichen Secante beschrieben
 „werden, die an einer beliebigen Nicht-Secante g hingeleitet,
 „und sie zerfällt alsdann in eine Kegelfläche II. Ordnung Pk
 „und eine Regelfläche, wenn g einen Punkt P mit der Curve
 „ k gemein hat. Die Fläche F hat mit keiner anderen solchen
 „Fläche IV. Ordnung mehr als vier Secanten gemein und enthält
 „desshalb auch höchstens vier Tangenten von k , wenn
 „nicht alle Tangenten. Sie schneidet sich selbst in jedem auf
 „ihr liegenden Theile der Raumcurve k , so dass letztere als
 „Doppelcurve der Fläche aufzufassen ist. Von einer beliebigen
 „Ebene ε wird folglich die Fläche F in einer Curve
 „IV. Ordnung geschnitten; und letztere hat jeden gemeinschaftlichen
 „Punkt P von k und ε zum Doppelpunkt, indem
 „keine durch P gelegte Gerade in mehr als zwei von P verschiedenen
 „Punkten die Curve treffen kann. Geht die Ebene ε durch eine
 „Secante a , welche auf der Fläche F liegt, so

„schneidet sie die Fläche ausserdem in einer Curve III. Ordnung, die einen auf k liegenden Doppelpunkt besitzt und „durch jeden gemeinschaftlichen Punkt von a und k hindurchgeht. Wenn endlich die Ebene ε zwei Secanten a und b mit „der Fläche F gemein hat, so schneidet sie die Fläche noch „in einer Curve II. Ordnung, welche von a und b in je einem „Punkte der Raumcurve k getroffen wird; in dem vorhin erwähnten speciellen Falle G der Fläche F zerfällt die Curve „II. Ordnung in die Gerade g und eine Secante.“

Schneiden wir das Secantensystem der Raumcurve k III. Ordnung durch eine beliebige Ebene Σ , so erhalten wir ein ebenes System, welches auf das ursprünglich gegebene System Σ_1 in sehr bemerkenswerther Weise bezogen ist. Jedem Punkte von Σ_1 entspricht eine Secante von k , also auch deren Schnittpunkt in Σ ; jeder Geraden von Σ_1 entspricht in dem Secantensystem eine Fläche II. Ordnung, welche durch die Raumcurve k geht, und daher in Σ ein Kegelschnitt, welcher alle gemeinschaftlichen Punkte von k und Σ enthält; jedem Strahlenbüschel I. Ordnung von Σ_1 entspricht in dem Secantensystem ein Flächenbüschel II. Ordnung und folglich in Σ ein Kegelschnittbüschel. Ich will diese Verwandtschaft der ebenen Systeme Σ und Σ_1 eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades nennen zum Unterschied von den Verwandtschaften der Collineation und der Reciprocität, die auch als geometrische Verwandtschaften ersten Grades bezeichnet werden könnten. Auch bei der collinearen Verwandtschaft ebener Systeme entspricht jedem Punkte ein Punkt; jeder Geraden aber entspricht eine Gerade, und nicht wie bei der Verwandtschaft zweiten Grades ein Kegelschnitt.

Aus der geometrischen Verwandtschaft zweiten Grades lassen sich sofort einige Haupt-Eigenschaften der Kegelschnittbüschel ableiten. Sei A_1 der Mittelpunkt eines in Σ_1 liegenden Strahlenbüschels, und A der entsprechende Punkt von Σ , durch welchen alle Curven des zugehörigen Kegelschnittbüschels hindurchgehen müssen, sei ferner g eine beliebige Gerade des Systemes Σ . Wenn alsdann g weder einen Punkt mit der Raumcurve k gemein hat, noch eine ^{uneigentliche} Secante von k ist, so entsprechen den sämtlichen Secanten von k , die von den Punkten des geraden Gebildes g ausgehen, die sämtlichen Punkte eines in Σ_1 liegenden und zu g projectivischen Kegelschnitts γ_1 . Derselbe geht nicht durch A_1 , wenn g nicht durch den Punkt A hindurchgeht; in diesem Falle

werden also die Punkte des Kegelschnitts γ_1 durch den Strahlenbündel A_1 , und folglich diejenigen des geraden Gebildes g durch den Kegelschnittbündel A involutorisch gepaart. Wenn das gerade Gebilde g in einem Punkte U die Raumcurve k schneidet, so hat es mit den Kegelschnitten des Bündels noch je einen von U verschiedenen Punkt gemein; den Secanten aber, welche ausserhalb des Punktes U von g getroffen werden, entsprechen in Σ_1 die sämtlichen Punkte eines zu g projectivischen geraden Gebildes g_1 . Wenn endlich g durch den Punkt A hindurchgeht, so hat das gerade Gebilde ebenfalls mit den Kegelschnitten des Bündels noch je einen Punkt gemein, der von A verschieden ist; ihm entspricht in Σ_1 ein durch A_1 gehender und zu g projectivischer Kegelschnitt γ_1 . Da nun alle in Σ_1 liegenden geraden Gebilde g_1 und alle durch A_1 gehenden Kegelschnitte γ_1 durch den Strahlenbündel A_1 projectivisch auf einander bezogen werden, so folgt:

Durch den Kegelschnittbündel werden alle geraden Gebilde g , welche je einen gemeinschaftlichen Punkt der Kegelschnitte enthalten, projectivisch auf einander bezogen, so dass auf jedem Kegelschnitt eine Gruppe homologer Punkte der geraden Gebilde liegt. Jede Gerade, welche durch keinen solchen gemeinschaftlichen Punkt hindurchgeht, wird von dem Kegelschnittbündel in einem involutorischen geraden Gebilde geschnitten, so dass je zwei einander zugeordnete Punkte dieses Gebildes auf einem und demselben Kegelschnitt des Bündels liegen.

Aus dem zweiten dieser Sätze folgt, dass der Bündel durch irgend zwei seiner Kegelschnitte völlig bestimmt ist. Um nämlich einen beliebigen dritten, durch einen gegebenen Punkt P gehenden Kegelschnitt des Bündels zu construiren, legen wir durch P Strahlen, welche die gegebenen beiden Kegelschnitte α und β in je zwei Punkten schneiden. Da α und β bei der vorliegenden Art von Bündeln mindestens einen gemeinschaftlichen Punkt haben, so sind offenbar unendlich viele solche Strahlen möglich. Die beiden Punktenpaare, in welchen ein solcher Strahl s von α und β geschnitten wird, bestimmen in s ein involutorisches gerades Gebilde; und suchen wir in diesem den zu P zugeordneten Punkt, so liegt derselbe auf dem durch P gehenden Kegelschnitt des Bündels. Sind von dem Bündel drei Kegelschnitte gegeben, so kann ein beliebiger vierter auch mittelst des ersten der obigen Sätze sehr leicht construirt werden.

Am Schlusse des letzten Vortrages fanden wir:

Die sämtlichen Kegelschnitte des Büschels schneiden oder berühren sich in jedem Punkte, in welchem irgend zwei von ihnen sich schneiden oder berühren; durch jeden anderen Punkt der Ebene geht ein einziger Kegelschnitt des Büschels (pag. 93). Die Polaren jedes beliebigen Punktes K in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels gehen durch einen und denselben Punkt K^1 .

Jedem Punkte K der Ebene ist demnach hinsichtlich aller Kegelschnitte des Büschels der Punkt K^1 conjugirt, welchen die Polaren von K mit einander gemein haben. Die Polaren der sämtlichen Punkte eines geraden Gebildes g in Bezug auf irgend zwei Kegelschnitte α und β bilden nun aber zwei zu g und folglich auch zu einander projectivische Strahlenbüschel; und da diese einen Kegelschnitt γ erzeugen, welcher durch die Mittelpunkte der Strahlenbüschel, d. h. durch die Pole von g hindurchgeht, so folgt:

„Den Punkten eines geraden Gebildes g sind hinsichtlich des „Kegelschnittbüschels die sämtlichen Punkte eines zu g projectivischen Kegelschnitts γ conjugirt, auf welchem auch die „Pole der Geraden g in Bezug auf die Kegelschnitte des Büschels „enthalten sind.“

Das Secantensystem der Raumcurve k III. Ordnung dachten wir uns erzeugt durch zwei zu einander collineare und zu dem ebenen Systeme Σ_1 reciproke Strahlenbündel S und T , deren Mittelpunkte ganz beliebig auf k angenommen werden konnten. Diese Bündel werden von der Ebene Σ in zwei zu Σ_1 reciproken ebenen Systemen geschnitten; die geometrische Verwandtschaft zweiten Grades kann desshalb auch ohne Hülfe der Raumcurve k auf folgende Art zwischen den ebenen Systemen Σ und Σ_1 aufgestellt werden. Wir beziehen Σ und Σ_1 in doppelter Weise reciprok auf einander, so dass jedem Punkte des einen Systemes zwei Gerade in dem anderen entsprechen, und weisen alsdann je zwei Punkte der Systeme einander zu, von denen jeder auf den beiden Geraden liegt, die dem anderen Punkte entsprechen. Jedem geraden Gebilde des einen Systemes entsprechen in dem anderen zwei Strahlenbüschel und folglich auch der Kegelschnitt, welchen diese Büschel mit einander erzeugen, und welcher zu dem geraden Gebilde projectivisch ist. Wir erkennen auf diesem Wege, dass das eine System Σ zu dem anderen Σ_1 ganz dieselben Beziehungen hat, wie das letztere Σ_1 zu dem ersteren Σ , dass also die vorliegende Verwandtschaft zweiten Grades gleich der collinearen und der reciproken Verwandtschaft eine durchaus wechselseitige ist.

In der Ebene Σ , durch welche wir das Secantensystem der Raumcurve k geschnitten haben, liegen auch einzelne Secanten und Punkte von k , nämlich höchstens drei Punkte und drei Secanten und mindestens ein Punkt und eine Secante. Die sämtlichen Punkte einer solchen Secante u entsprechen einem und demselben Punkte U_1 des ebenen Systemes Σ_1 ; und einem solchen gemeinschaftlichen Punkte U von Σ und k entsprechen in Σ_1 die sämtlichen Punkte einer Geraden u_1 , welcher in dem Secantensystem die Kegelfläche Uk II. Ordnung entspricht. Die Punkte U und U_1 bilden also eine Ausnahme von der Regel, nach welcher jedem Punkte des einen Systemes ein einziger Punkt des anderen entspricht. Wir wollen sie Hauptpunkte der ebenen Systeme nennen, und die ihnen entsprechenden Geraden sollen Hauptlinien heißen. In jeder Ebene Σ liegen (pag. 74) eben so viele Punkte wie Secanten der Raumcurve III. Ordnung; also:

„Das ebene System Σ enthält eben so viele Hauptlinien wie Hauptpunkte, also mindestens eine und höchstens drei; genau so viele wie Σ besitzt auch Σ_1 , weil jedem Hauptpunkte des einen Systemes eine Hauptlinie des anderen entspricht. Die Verbindungslinie von zwei Hauptpunkten eines Systemes ist eine Hauptlinie desselben und der Schnittpunkt von zwei Hauptlinien ist ein Hauptpunkt.“

Der letzte Theil des Satzes folgt daraus, dass jede Verbindungslinie von zwei Punkten der Raumcurve k III. Ordnung eine Secante derselben ist, und jeder Schnittpunkt von zwei Secanten auf der Curve liegt.

Jedem geraden Gebilde von Σ_1 entspricht in dem Secantensystem der Raumcurve k eine durch k gehende Fläche II. Ordnung; und wir wissen, dass die Punkte einer beliebigen Secante paarweise einander conjugirt sind in Bezug auf alle durch k gelegten Flächen II. Ordnung. Die Kegelschnitte in Σ , welche den geraden Gebilden von Σ_1 entsprechen, liegen nun aber auf diesen Flächen II. Ordnung, so dass sich ergibt:

„Die Kegelschnitte des einen Systemes Σ , welche den Geraden des anderen Σ_1 entsprechen, gehen durch alle Hauptpunkte von Σ ; und jedem Punkte einer Hauptlinie von Σ ist ein Punkt derselben Hauptlinie conjugirt hinsichtlich aller jener Kegelschnitte.“

Analoges gilt für die Kegelschnitte von Σ_1 , welche den Geraden von Σ entsprechen.

Einem beliebigen Kegelschnitt φ_1 von Σ_1 entspricht (pag. 99) in Σ eine Curve φ IV. Ordnung, welche jeden Hauptpunkt von Σ zum Doppelpunkt hat. Geht φ_1 durch einen Hauptpunkt von Σ_1 , so zerfällt φ in eine Hauptlinie von Σ und eine Curve III. Ordnung mit einem Doppelpunkt. Geht φ_1 durch zwei Hauptpunkte von Σ_1 , so zerfällt φ in zwei Hauptlinien von Σ und eine Curve II. Ordnung. Denken wir uns die geometrische Verwandtschaft zwischen Σ und Σ_1 dadurch hergestellt, dass diese beiden Systeme in doppelter Weise reciprok auf einander bezogen wurden, so entsprechen dem Kegelschnitt φ_1 von Σ_1 zwei Strahlenbüschel II. Ordnung in Σ , so wie die Curve, auf welcher je zwei homologe Strahlen dieser Büschel sich schneiden. D. h.:

„Zwei projectivische Strahlenbüschel II. Ordnung, die in derselben Ebene liegen, erzeugen im Allgemeinen eine Curve IV. Ordnung mit höchstens drei Doppelpunkten und mindestens einem solchen. Diese Curve kann aber zerfallen in eine Gerade und eine Curve III. Ordnung mit einem Doppelpunkt, oder in zwei Gerade und einen Kegelschnitt, oder endlich in vier Gerade.“

Sei U ein Hauptpunkt und g ein beliebiges durch ihn gehendes gerades Gebilde von Σ . Dann zerfällt der dem g entsprechende Kegelschnitt von Σ_1 in die Hauptlinie u_1 , welche dem Punkte U entspricht, und in ein zu g projectivisches gerades Gebilde g_1 . Denn alle Secanten der Raumcurve k , welche von g ausserhalb des Punktes U getroffen werden, bilden eine Regelschaar, und dieser entspricht in Σ_1 jenes gerade Gebilde g_1 . Die Gerade g_1 muss durch einen Hauptpunkt U_1 der Ebene Σ_1 hindurchgehen; denn weil g ein Leitstrahl der Regelschaar ist, so liegt ein Strahl u derselben in der durch g gehenden Ebene Σ , und der dem u entsprechende Hauptpunkt U_1 ist deshalb auf g_1 enthalten. Den sämtlichen durch U gehenden Geraden g von Σ müssen demnach die sämtlichen durch U_1 gehenden Geraden g_1 von Σ_1 entsprechen. Wir wollen die Punkte U und U_1 zwei einander zugeordnete Hauptpunkte der Systeme nennen. Die Büschel U und U_1 sind projectivisch; denn einem beliebigen geraden Gebilde a von Σ entspricht in Σ_1 ein zu a projectivischer, durch U_1 gehender Kegelschnitt α_1 , und die Büschel U und U_1 liegen perspectivisch zu resp. a und α_1 . Also:

„Die Hauptpunkte der Systeme Σ und Σ_1 sind paarweise einander zugeordnet, so dass jedem geraden Gebilde g von Σ ,

„welches durch einen Hauptpunkt U hindurchgeht, ein zu g projectivisches gerades Gebilde g_1 von Σ_1 entspricht, welches durch den zugeordneten Hauptpunkt U_1 hindurchgeht. Die Büschel U und U_1 sind zu einander projectivisch in Ansehung ihrer einander entsprechenden Geraden.“

Wir können die ebenen Systeme in eine solche Lage zu einander bringen, dass die Büschel U und U_1 perspectivisch liegen, d. h. Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels sind. Sei z die durch U und U_1 gehende Axe dieses Ebenenbüschels; dann liegen je zwei einander entsprechende Punkte der Systeme mit z in einer Ebene. Projiciren wir die Systeme Σ und Σ_1 beziehungsweise aus zwei beliebigen, auf z liegenden Punkten S und S_1 , so erhalten wir zwei geometrisch verwandte Strahlenbündel. Je zwei einander entsprechende Strahlen dieser Bündel liegen mit z in einer Ebene und schneiden einander; und alle so entstehenden Schnittpunkte sind auf einer durch S und S_1 gehenden Fläche enthalten, welche mit jeder Ebene der Bündel S und S_1 einen Kegelschnitt gemein hat, also eine Fläche II. Ordnung sein muss. Geht nämlich eine beliebige Ebene durch $\overline{SS_1}$, so enthält sie zwei projectivische Strahlenbüschel der Bündel S und S_1 , und diese Strahlenbüschel erzeugen jenen Kegelschnitt. Geht die Ebene nur durch den Punkt S , so enthält sie von S einen Strahlenbüschel, welchem im Bündel S_1 eine durch $\overline{S_1 U_1}$ gehende Kegelfläche II. Ordnung entspricht, und letztere hat mit der Ebene den erwähnten, durch S gehenden Kegelschnitt gemein. Ist u die Hauptlinie von Σ , welche dem Hauptpunkte U_1 von Σ_1 entspricht, so ist $\overline{Su}$ die Berührungs-Ebene der Fläche II. Ordnung im Punkte S ; denn jeder in $\overline{Su}$ liegende Strahl von S entspricht dem gemeinschaftlichen Hauptstrahle $\overline{S_1 S}$ der Bündel und berührt in S die Fläche. Man kann sich auf diese Weise mittelst der Flächen II. Ordnung eine sehr einfache und deutliche Vorstellung von der geometrischen Verwandtschaft zweiten Grades machen.

Zwischen ebenen Systemen lassen sich noch zwei andere geometrische Verwandtschaften zweiten Grades aufstellen, die gleich der bisher untersuchten sofort auf Strahlenbündel übertragen werden können. Wir erhalten sie am Einfachsten, indem wir eines oder auch jedes der geometrisch verwandten Systeme Σ und Σ_1 durch ein reciprokes ebenes System ersetzen. Alsdann entspricht im Allgemeinen entweder jedem Punkt von Σ ein Strahl von Σ_1 , jedem geraden Gebilde g von Σ ein zu g projectivischer

Strahlenbüschel II. Ordnung von Σ_1 und jedem Strahlenbüschel A_1 I. Ordnung von Σ_1 ein zu A_1 projectivischer Kegelschnitt von Σ ; oder es entspricht jedem Strahle von Σ ein Strahl von Σ_1 und jedem Strahlenbüschel I. Ordnung von Σ oder Σ_1 ein Büschel II. Ordnung in resp. Σ_1 oder Σ . Wenn Σ und Σ_1 eine Fläche II. Ordnung berühren, so erhalten wir z. B. die letzte Art der geometrischen Verwandtschaft, indem wir je zwei Strahlen der Systeme einander zuweisen, die in irgend einer Berührungs-Ebene der Fläche enthalten sind.

Vierzehnter Vortrag.

Collineare Systeme, welche in einander liegen. Involutorische Systeme in der Ebene und im Raume.

Zwei collineare Systeme Σ und Σ_1 , die in derselben Ebene liegen, haben alle ihre Elemente entsprechend gemein oder sind identisch, sobald sie ein Viereck entsprechend gemein haben (pag. 13); sie liegen perspectivisch, d. h. sie haben ein gerades Gebilde und einen Strahlenbüschel entsprechend gemein, sobald sie drei Punkte einer Geraden oder auch drei Strahlen eines Punktes entsprechend gemein haben (pag. 16). Wie viele Punkte und Strahlen haben sie entsprechend gemein, wenn sie weder identisch sind, noch perspectivisch liegen?

Um diese Frage zu entscheiden, nehmen wir ausserhalb der Ebene, in welcher die collinearen Systeme Σ und Σ_1 liegen, zwei beliebige Punkte S und S_1 an, deren Verbindungslinie weder einen Punkt noch einen Strahl trifft, der in den Systemen sich selbst entspricht. Projiciren wir sodann die Systeme Σ und Σ_1 aus den resp. Punkten S und S_1 , so werden diese zu Mittelpunkten von zwei collinearen Strahlenbündeln, welche eine Raumcurve III. Ordnung erzeugen. Und jeder Punkt, welchen Σ und Σ_1 entsprechend gemein haben, liegt auf dieser Raumcurve, denn er ist der Schnittpunkt von zwei homologen Strahlen der Bündel S und S_1 ; ebenso ist jeder Strahl, welchen Σ und Σ_1 entsprechend ge-

mein haben, eine Secante der Raumcurve III. Ordnung. Wir erhalten somit den Satz (vergl. pag. 70 und 74):

Zwei collineare ebene Systeme, die auf einander, aber nicht perspectivisch liegen, haben entweder die Eckpunkte und Seiten eines Dreiecks, oder zwei Punkte und zwei Gerade (von denen die eine jene beiden Punkte verbindet und in einem derselben von der anderen Geraden geschnitten wird), oder endlich einen Punkt und eine Gerade entsprechend gemein.

Diese drei Fälle treten ein, je nachdem die Raumcurve III. Ordnung mit der Ebene der collinearen Systeme drei oder zwei Punkte oder einen Punkt gemein hat.

Zwei collineare Strahlenbündel, die concentrisch, aber nicht perspectivisch liegen, haben also entweder die Kanten und Seiten eines Dreikants, oder zwei Strahlen und zwei Ebenen, oder einen Strahl und eine Ebene entsprechend gemein. Dieser Satz folgt aus dem vorhergehenden mittelst des Gesetzes der Reciprocität, oder auch, indem man die collinearen Bündel durch eine Ebene in zwei collinearen Systemen schneidet. Ebenso folgt: Sind im Raume gegeben ein ebenes System Σ und ein zu demselben collinearer Strahlenbündel S , so gehen im Allgemeinen mindestens ein Strahl und eine Ebene, und höchstens drei Strahlen und drei Ebenen von S durch die ihnen entsprechenden Elemente von Σ ; doch kann auch Σ zu einem Schnitt von S , oder zu S selbst perspectivisch liegen.

Zwei collineare räumliche Systeme haben alle ihre Elemente entsprechend gemein oder sind identisch, sobald sie fünf Punkte entsprechend gemein haben, von denen keine vier in einer Ebene liegen (pag. 21); sie liegen perspectivisch, d. h. sie haben einen Strahlenbündel und ein ebenes System entsprechend gemein, sobald sie ein ebenes Viereck oder auch ein Vierkant entsprechend gemein haben (pag. 19 und 24). Wenn zwei collineare räumliche Systeme Σ und Σ_1 ein Tetraeder $ABCD$ entsprechend gemein haben, und wenn ausserdem irgend einem Punkte P von Σ , welcher in keiner Fläche des Tetraeders liegt, ein Punkt P_1 von Σ_1 entspricht, so können folgende Fälle eintreten: Wenn die Gerade PP_1 durch einen Eckpunkt A des Tetraeders hindurchgeht, so haben die Systeme vier Strahlen und folglich alle Elemente des Bündels A und ebenso das ebene System BCD entsprechend gemein, und liegen perspectivisch. Werden zwei Gegenkanten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ des Tetraeders von der Geraden PP_1 geschnitten, so haben die

collinearen Systeme drei und folglich alle durch $\overline{AB}$ oder $\overline{CD}$ gehenden Ebenen, also auch alle auf diesen Kanten liegenden Punkte entsprechend gemein, so wie jeden Strahl, welcher sowohl von $\overline{AB}$ als auch von $\overline{CD}$ geschnitten wird. Schneidet $\overline{PP_1}$ nur eine Kante $\overline{AB}$ des Tetraeders, so haben die Systeme drei und folglich alle durch $\overline{AB}$ gehenden Ebenen, also auch jeden auf $\overline{CD}$ liegenden Punkt entsprechend gemein, ausserdem aber die Ebenen $\overline{ACD}$ und $\overline{BCD}$ so wie jeden durch A oder B gehenden Strahl dieser Ebenen. Wenn endlich die Gerade $\overline{PP_1}$ mit keiner Kante des Tetraeders in einer Ebene liegt, so haben die collinearen Systeme nur die Eckpunkte, Kanten und Seiten des Tetraeders $ABCD$ entsprechend gemein.

Wir wollen nicht alle übrigen Fälle aufzählen, in denen zwei collineare räumliche Systeme einzelne oder auch unendlich viele Elemente entsprechend gemein haben, sondern uns mit folgenden Bemerkungen begnügen. Es kann der Fall eintreten (und die geschaart-involutorischen Systeme werden uns ein Beispiel hierfür liefern), dass die Systeme keinen Punkt und keine Ebene entsprechend gemein haben; wenn aber ein Punkt S des Systemes Σ mit dem entsprechenden Punkte S_1 von Σ_1 zusammenfällt, so haben die collinearen Strahlenbündel S und S_1 und folglich auch die räumlichen Systeme noch mindestens einen Strahl und eine Ebene entsprechend gemein. Ebenso wenn eine Ebene α von Σ mit der entsprechenden Ebene α_1 von Σ_1 zusammenfällt, so haben die räumlichen Systeme mindestens einen Punkt und einen Strahl der Ebene α entsprechend gemein (pag. 107); denn α erscheint als Träger von zwei collinearen ebenen Systemen, die in den räumlichen Systemen einander entsprechen.

Zwei collineare Gebilde können auch involutorische Lage haben, so dass jedem Elemente ein anderes doppelt entspricht. Die Gebilde haben alsdann unendlich viele Elemente entsprechend gemein, namentlich jeden Strahl, welcher irgend zwei homologe Punkte der Gebilde mit einander verbindet, oder in welchem irgend zwei homologe Ebenen sich schneiden. Denn wenn (Fig. 15) einem Punkte, den wir mit A oder B_1 bezeichnen wollen, je nachdem er zu dem einen oder dem anderen der collinearen Gebilde gerechnet wird, zwei zusammenfallende Punkte A_1 und B entsprechen, so fällt auch die Gerade $\overline{AB}$ des ersten Gebildes mit ihrer entsprechenden $\overline{A_1 B_1}$ zusammen. Liegen zwei collineare ebene Systeme involutorisch, so haben dieselben sonach unend-

lich viele Strahlen entsprechend gemein und folglich perspektivische Lage. Je zwei homologe Punkte derselben liegen in einer Geraden mit dem Collineationscentrum S , welches in diesem Falle das Involutioncentrum heissen soll; und je zwei homologe Strahlen schneiden sich auf der Collineationsaxe u , welche in diesem Falle auch wohl Involutionaxe genannt wird. Jede durch das Involutioncentrum S gehende Gerade ist der Träger eines involutorischen geraden Gebildes, von welchem S und der auf u liegende Punkt die Ordnungspunkte sind; und ebenso ist jeder Punkt der Collineationsaxe u der Mittelpunkt eines involutorischen Strahlenbüschels, von welchem u und der durch S gehende Strahl die Ordnungsstrahlen sind. Durch das Collineationscentrum und die Collineationsaxe sind also je zwei homologe Punkte oder Strahlen der Systeme harmonisch von einander getrennt.

Zwei collineare Systeme Σ und Σ_1 , welche in derselben Ebene liegen, haben involutorische Lage, sobald irgend zwei Punkten AB_1 und CD_1 (Fig. 15) zwei andere Punkte A_1B und C_1D , die mit jenen ein Viereck bilden, in doppelter Weise entsprechen. Nämlich die Gerade $\overline{AB}$ entspricht der Geraden $\overline{A_1B_1}$, d. h. sich selbst; und da in ihr die Punkte AB_1 und A_1B einander doppelt entsprechen, so sind ihre sämtlichen Punkte involutorisch gepaart (I. Abth. pag. 117). Das Nämliche gilt von der Geraden $\overline{CD}$ oder $\overline{C_1D_1}$. Die Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ schneiden sich in einem Punkte S , welcher sich selbst entspricht und in jedem der involutorischen geraden Gebilde $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ ein Ordnungspunkt ist. Jede beliebige Gerade der Ebene, die nicht durch S geht, schneidet die Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ in zwei Punkten; ihr entspricht folglich diejenige Gerade doppelt, welche die zugeordneten beiden Punkte von $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ mit einander verbindet. Und je zwei Punkte der Systeme müssen einander doppelt entsprechen, weil sie als Schnittpunkte von Geraden angesehen werden können, die einander doppelt entsprechen. Der Schnittpunkt S von $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ ist das Involutioncentrum, und die Gerade u , auf welcher die übrigen Gegenseiten des vollständigen Vierecks $ABCD$ sich paarweise schneiden, ist die Involutionaxe der Systeme.

Betrachten wir die involutorisch liegenden Systeme als ein einziges System, dessen Punkte und Strahlen paarweise einander zugeordnet sind, so soll dasselbe ein involutorisches ebenes System

genannt werden. Die soeben gewonnenen Ergebnisse lassen sich dann wie folgt zusammenstellen:

„In einem involutorischen ebenen Systeme liegen je zwei einander zugeordnete Punkte mit dem Involutioncentrum in einer Geraden und sind durch dieses und die Involutionaxe harmonisch getrennt; je zwei einander zugeordnete Strahlen schneiden sich auf der Involutionaxe, und sind durch diese und das Involutioncentrum harmonisch getrennt. Um die Elemente eines ebenen Systemes involutorisch zu paaren, kann man irgend zwei Punkten P und Q zwei beliebige andere P_1 und Q_1 zuordnen, welche mit P und Q ein Viereck bilden; oder man kann das Involutioncentrum S und die Involutionaxe u willkürlich in der Ebene annehmen.“

Jede Curve KAL , welche durch zwei Punkte K und L der Involutionaxe begrenzt ist, bildet mit der ihr zugeordneten Curve KA_1L eine involutorische Curve. Ebenso erhalten wir eine involutorische Curve, wenn wir zu einer Curve SAK oder auch PAP_1 , welche entweder vom Involutioncentrum S und einem Punkte K der Involutionaxe, oder auch von zwei einander zugeordneten Punkten P und P_1 begrenzt ist, die zugeordnete Curve SA_1K oder P_1A_1P hinzufügen. Ein beliebiger Kegelschnitt z. B. erscheint als involutorische Curve, wenn ein beliebiger innerhalb oder ausserhalb desselben gelegener Punkt S als Involutioncentrum und dessen Polare u als Involutionaxe angenommen wird. Der unendlich fernen Geraden ist, beiläufig bemerkt, eine zu u parallele Gerade g zugeordnet, welche den Abstand von S und u halbiert. Der Kegelschnitt ist also eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem er mit der Geraden g zwei Punkte M und N , oder einen Punkt P oder keinen Punkt gemein hat; und im ersten Fall sind die Asymptoten zu $\overline{SM}$ und $\overline{SN}$ parallel, im zweiten ist $\overline{SP}$ ein Durchmesser der Parabel. Hiedurch ist sehr einfach die Aufgabe gelöst:

„Zu entscheiden, ob ein Kegelschnitt, von welchem nur ein begrenztes Stück gegeben ist, eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse ist.“

Ein involutorisches ebenes System wird aus jedem nicht in ihm gelegenen Punkte durch einen involutorischen Strahlenbündel projicirt. Die Involution-Ebene dieses Bündels geht durch die Involutionaxe u des ebenen Systemes, und die Involutionaxe des Bündels geht durch das Involutioncentrum S des Systemes.

Zwei collineare räumliche Systeme Σ und Σ_1 haben involutorische Lage, wenn zwei ebene Systeme α und α_1 derselben, die nicht auf einander liegen, einander doppelt entsprechen, d. h. jedem Elemente des einen α ein Element des anderen α_1 doppelt entspricht. Denn jeder beliebigen Ebene, welche die beiden ebenen Systeme α und α_1 in den Geraden g und l schneidet, entspricht alsdann diejenige Ebene doppelt, welche die zugeordneten Geraden g_1 und l_1 der resp. Ebenen α_1 und α mit einander verbindet; und da jeder Punkt oder Strahl des Raumes als Schnitt von drei oder zwei solchen Ebenen betrachtet werden kann, so entspricht ihm der Schnittpunkt oder die Schnittlinie der zugeordneten Ebenen in doppelter Weise. Weil somit jedem Elemente ein anderes doppelt entspricht, so können wir auch die involutorisch liegenden räumlichen Systeme als ein einziges involutorisches System auffassen, dessen Elemente paarweise einander zugeordnet sind.

Jeder Strahl, welcher zwei einander zugeordnete Punkte des involutorischen Systemes mit einander verbindet, oder in welchem zwei einander zugeordnete Ebenen sich schneiden, fällt mit dem ihm entsprechenden Strahle zusammen, ist also sich selbst zugeordnet. Dieses gilt auch von der Geraden s , in welcher die einander zugeordneten Ebenen α und α_1 sich schneiden. Wir erhalten nun zwei wesentlich verschiedene Arten involutorischer Systeme, je nachdem in der Geraden s jeder Punkt mit seinem zugeordneten zusammenfällt oder nicht.

Im ersteren Falle haben die ebenen Systeme α und α_1 das gerade Gebilde s entsprechend gemein; sie liegen folglich perspectivisch, und erzeugen einen Strahlenbündel S , dessen sämtliche Strahlen und Ebenen sich selbst zugeordnet sind, weil sie je zwei einander zugeordnete Elemente von α und α_1 mit einander verbinden. Die collinearen räumlichen Systeme Σ und Σ_1 haben den Strahlenbündel S und folglich noch ein ebenes System Y entsprechend gemein, sie liegen perspectivisch; in dem von ihnen gebildeten involutorischen System ist somit ebenfalls jedes Element der Ebene Y sich selbst zugeordnet. Ein involutorisches System dieser Art wird ein perspectivisch-involutorisches genannt; und der Punkt S , mit welchem je zwei zugeordnete Punkte des Systemes in einer Geraden und je zwei zugeordnete Gerade in einer Ebene liegen müssen, heisst das Involutions-Centrum, die Ebene Y dagegen, auf welcher je zwei einander zugeordnete

Strahlen oder Ebenen sich schneiden müssen, heisst die Involutions-Ebene des Systemes. Wir können die Haupt-Eigenschaften dieser Art von involutorischen Systemen wie folgt zusammenfassen:

„Im perspectivisch-involutorischen Systeme ist jede durch das Involutionscentrum S gehende Gerade oder Ebene und jeder in der Involutions-Ebene Y liegende Punkt oder Strahl sich selbst zugeordnet. Jede durch S gehende Ebene ist der Träger eines involutorischen ebenen Systemes, dessen Involutionscentrum der Punkt S ist, und welches von Y in seiner Involutionsaxe geschnitten wird; ebenso ist jeder auf Y liegende Punkt der Mittelpunkt eines involutorischen Strahlenbündels, dessen Involutionsaxe Y ist und dessen Involutionsaxe durch S hindurchgeht. Hieraus folgt, dass je zwei einander zugeordnete Punkte, Strahlen oder Ebenen durch das Involutionscentrum S und die Involutionsaxe Y harmonisch getrennt sind. Um die Elemente des Raumes involutorisch zu paaren, kann man das Involutionscentrum S und die Involutionsaxe Y willkürlich annehmen, oder auch S und zwei einander zugeordnete Ebenen α und α_1 , oder Y und zwei einander zugeordnete Punkte A und A_1 .“

Jede gewundene Curve, welche entweder von zwei Punkten K und L der Involutionsaxe, oder von zwei einander zugeordneten Punkten A und A_1 , oder endlich vom Involutionscentrum S und einem Punkte K der Involutionsaxe begrenzt wird, bildet mit der ihr zugeordneten Curve eine sogenannte involutorische Raumcurve. Jede Fläche, welche von einer involutorischen oder auch von einer sich selbst zugeordneten Curve begrenzt wird, bildet mit der ihr zugeordneten Fläche eine involutorische Fläche. Z. B. eine beliebige Fläche F II. Ordnung erscheint als involutorische Fläche, wenn irgend eine sie nicht berührende Ebene Y als Involutionsaxe, und deren Pol S als Involutionscentrum angenommen wird. Die Fläche F ist ein Hyperboloid oder ein Paraboloid oder endlich ein Ellipsoid, je nachdem sie von der zu Y parallelen Ebene γ , welche den Abstand von S und Y halbiert, in einer Curve k geschnitten oder in einem Punkte P berührt oder gar nicht getroffen wird; denn jedem gemeinschaftlichen Punkte P von F und γ ist auf dem Strahle SP ein unendlich ferner Punkt der Fläche F zugeordnet, weil γ und die unendlich ferne Ebene einander entsprechen. Im Falle des Hyper-

boloides ist also die Kegelfläche Sk dem Asymptotenkegel parallel; im Falle des Paraboloides ist $\overline{SP}$ ein Durchmesser desselben.

Wir wollen jetzt die zweite Art der involutorischen räumlichen Systeme untersuchen, das sogenannte geschaart-involutorische System. Je zwei einander zugeordnete ebene Systeme α und α_1 desselben haben nicht alle Punkte ihrer Schnittlinie s entsprechend gemein, obgleich diese Gerade sich selbst zugeordnet ist; vielmehr sind die Punkte von s einander paarweise zugeordnet, also involutorisch gepaart. Das involutorische gerade Gebilde s hat entweder zwei Ordnungspunkte U, V oder keine sich selbst zugeordneten Punkte. Im letzteren Falle giebt es keine sich selbst zugeordnete Ebene, weil dieselbe von der Geraden s in einem sich selbst zugeordneten Punkte geschnitten werden müsste, wenn sie nicht durch s hindurchgeht; wäre aber eine durch s gehende Ebene sich selbst zugeordnet, so müsste sie der Träger eines involutorischen Systemes sein, dessen Involutionssaxe mit s einen sich selbst zugeordneten Punkt gemein hätte. Auch giebt es in diesem Falle keinen sich selbst zugeordneten Punkt, weil derselbe aus s durch eine sich selbst zugeordnete Ebene projecirt werden müsste. Wenn dagegen das involutorische gerade Gebilde s zwei Ordnungspunkte U und V besitzt, die also in dem involutorischen Systeme sich selbst zugeordnet sind, so giebt es zwei durch resp. U und V gehende Gerade u und v , deren sämtliche Punkte und Ebenen sich selbst zugeordnet sind und welche die Involutionssaxen des Systemes genannt werden sollen. Seien nämlich A und A_1 irgend zwei einander zugeordnete Punkte der Ebenen α und α_1 , welche nicht auf der Geraden s liegen; dann ist die Gerade $\overline{AA_1}$ und folglich auch jede der Ebenen $\overline{UA A_1}$ und $\overline{VA A_1}$ sich selbst zugeordnet. Diese Ebenen sind die Träger von zwei involutorischen ebenen Systemen, weil ihre Punkte involutorisch gepaart sind, und da ihre Involutionssentra U_1 und V_1 mit A und A_1 auf einer Geraden liegen, so müssen ihre resp. Involutionssaxen u und v durch die sich selbst zugeordneten Punkte U und V gehen und mit den Geraden $\overline{U V_1}$ und $\overline{V U_1}$ zusammenfallen.

Die Punkte U_1 und V_1 sind als Ordnungspunkte des involutorischen geraden Gebildes $\overline{AA_1}$ durch die einander zugeordneten Punkte A und A_1 harmonisch getrennt; und hieraus ist leicht zu erkennen, dass u und v einander nicht schneiden können. Und weil nun jeder Punkt der Involutionssaxen u und v sich selbst zugeordnet ist, so gilt dasselbe von jedem Strahle, welcher

zwei Punkte von u und v mit einander verbindet, sowie von jeder Ebene, welche durch eine dieser Axen hindurchgeht und also dieselbe mit einem sich selbst zugeordneten Punkte der anderen Axe verbindet.

Wir können diese Ergebnisse wie folgt zusammenstellen:

„Ein geschaart-involutorisches System hat entweder gar keine Punkte und Ebenen, die sich selbst zugeordnet sind, oder es besitzt zwei Involutions-Axen u und v , die nicht in einer Ebene liegen und deren sämtliche Punkte und Ebenen sich selbst zugeordnet sind. Jede durch eine dieser Involutions-Axen gehende Ebene ist der Träger eines involutorischen ebenen Systemes, dessen Involutions-Centrum auf der anderen Axe liegt; und jeder auf einer der Involutions-Axen liegende Punkt ist der Mittelpunkt eines involutorischen Strahlenbündels, dessen Involutions-Ebene durch die andere Axe hindurchgeht. Daraus folgt, dass je zwei einander zugeordnete Punkte, Gerade oder Ebenen durch die Involutions-Axen u und v harmonisch getrennt sind. Die Verbindungslinie von beliebigen zwei einander zugeordneten Punkten A , A_1 und ebenso die Schnittlinie von beliebigen zwei einander zugeordneten Ebenen α und α_1 ist sich selbst zugeordnet und schneidet beide Involutions-Axen.“

Wir wollen der Kürze wegen jeden sich selbst zugeordneten Strahl einen Leitstrahl des geschaart-involutorischen Systemes nennen, so dass jede Verbindungslinie von zwei einander zugeordneten Punkten und jede Schnittlinie von zwei einander zugeordneten Ebenen ein Leitstrahl ist.

„Wenn zwei Leitstrahlen a , b sich schneiden, so ist ihr Schnittpunkt $\bar{a}b$ und ebenso ihre Ebene $\overline{ab}$ sich selbst zugeordnet, und der erstere liegt auf einer der beiden Involutions-Axen u , v , während die letztere durch die andere Involutions-Axe hindurchgeht. In einem geschaart-involutorischen Systeme, welches keine sich selbst zugeordneten Punkte besitzt, geht also durch jeden Punkt A nur ein Leitstrahl $\overline{AA_1}$, und ebenso liegt in jeder Ebene α nur ein Leitstrahl $\alpha\alpha_1$, in welchem die Ebene α von der ihr zugeordneten Ebene α_1 geschnitten wird. Die sämtlichen Leitstrahlen, welche von zwei einander zugeordneten und nicht in einer Ebene liegenden Geraden g , g_1 geschnitten werden, bilden eine Regelschaar; dieselbe wird sowohl von den projectivischen geraden Ge-

„bilden g, g_1 , als auch von den projectivischen Ebenenbüscheln „ g, g_1 erzeugt. Diese Regelschaar ist die Leitschaar von „einer zweiten Regelschaar, zu welcher auch g und g_1 gehören, und deren Strahlen involutorisch gepaart sind, weil „je zwei zugeordnete Strahlen einander in doppelter Weise „entsprechen. Durch drei Leitstrahlen a, b, c , von denen „keine zwei sich schneiden, ist eine Regelschaar bestimmt, „deren sämtliche Strahlen aus Leitstrahlen des Systemes „bestehen; denn jeder Geraden g , welche von a, b und c gleichzeitig geschnitten wird, ist eine eben solche Gerade g_1 zugeordnet, und die projectivischen geraden Gebilde g und g_1 erzeugen jene Regelschaar abc .“

Die perspectivisch- und die geschaart-involutorischen Systeme unterscheiden sich hauptsächlich durch Folgendes. In den ersteren wird ein Strahl, der nicht sich selbst zugeordnet ist, stets von dem ihm zugeordneten Strahle geschnitten; in den letzteren Systemen nur dann, wenn der Strahl mit einer der Involutionen-Axen in einer Ebene liegt. In einem perspectivisch-involutorischen Systeme ist jeder sich selbst zugeordnete Strahl entweder der Träger eines involutorischen geraden Gebildes, und alsdann ist jede durch ihn gehende Ebene sich selbst zugeordnet und geht durch das Collineations-Centrum; oder er ist der Träger eines involutorischen Ebenenbüschels, und in diesem Falle ist jeder seiner Punkte sich selbst zugeordnet und in der Collineations-Ebene gelegen. Dagegen ist im geschaart-involutorischen Systeme jeder Leitstrahl der Träger eines involutorischen geraden Gebildes und eines involutorischen Ebenenbüschels; und nur wenn der Leitstrahl eine der beiden Involutionen-Axen des Systemes ist, muss jeder Punkt und jede Ebene desselben sich selbst zugeordnet sein.

Eine beliebige Fläche F II. Ordnung erscheint als involutorische Fläche eines geschaart-involutorischen Systemes, wenn irgend eine Gerade u , welche die Fläche nicht berührt, und die Polare v derselben als Involutionen-Axen des Systemes angenommen werden. Je zwei Punkte A und A_1 der Fläche, deren Verbindungsline $\overline{AA_1}$ sowohl von u als auch von v geschnitten wird, sind durch u und v , d. h. durch die beiden auf u und v liegenden Schnittpunkte, harmonisch getrennt.

Fünfzehnter Vortrag.

Strahlencomplexe, welche von collinearen räumlichen Systemen erzeugt werden.

Zwei collineare räumliche Systeme Σ und Σ_1 , welche nicht perspectivisch liegen, erzeugen einen Strahlencomplex, welchem jede Schnittlinie von zwei homologen Ebenen und jede Verbindungslinie von zwei homologen Punkten angehört. Die Elemente dieses Strahlencomplexes will ich die Ordnungsstrahlen der gegebenen collinearen Systeme nennen; ihre Vertheilung im unendlichen Raume, so wie ihre Abhängigkeit von einander und von der collinearen Verwandtschaft der Systeme Σ und Σ_1 bilden den Gegenstand dieses Vortrages.

Zunächst können wir die Ordnungsstrahlen collinearer Systeme auch wie folgt definiren:

„In zwei collinearen räumlichen Systemen Σ und Σ_1 soll jeder „Strahl s , welcher mit seinem entsprechenden s_1 in einer „Ebene liegt, ein Ordnungsstrahl genannt werden. In jedem „Ordnungsstrahle liegen zwei einander entsprechende Punkte „und schneiden sich zwei homologe Ebenen der collinearen „Systeme.“

Wirklich stimmt diese zweite Definition mit der ersten völlig überein. Sind nämlich P und P_1 zwei homologe Punkte der Systeme Σ und Σ_1 , so entspricht dem Strahle s von Σ , welcher P mit P_1 verbindet, ein durch P_1 gehender Strahl s_1 von Σ_1 , weil s durch P geht; und s liegt folglich mit s_1 in einer Ebene, da beide den Punkt P_1 enthalten. Sind anderseits π und π_1 zwei homologe Ebenen von Σ und Σ_1 , so entspricht dem Strahle $\pi \pi_1$ oder s von Σ ein Strahl s_1 von Σ_1 , und weil s in π liegt, so muss s_1 in π_1 liegen; also sind auch in diesem Falle s und s_1 in einer Ebene π_1 enthalten. Wenn umgekehrt ein Strahl s von Σ mit dem entsprechenden Strahle s_1 von Σ_1 einen Punkt P_1 gemein hat, so entspricht diesem Punkte P_1 von s_1 ein Punkt P von s , und s ist folglich die Verbindungslinie von zwei homologen Punkten P und P_1 der collinearen Systeme; ebenso entspricht der Ebene π_1 von s_1 , welche diesen Strahl mit s verbindet, eine Ebene π

von s , oder s ist die Schnittlinie von zwei homologen Ebenen der Systeme.

Die beiden collinearen Systeme können, wie wir gesehen haben, einzelne oder auch unendlich viele Punkte und Ebenen entsprechend gemein haben. Jeder solche Punkt soll ein Hauptpunkt, und jede sich selbst entsprechende Ebene eine Hauptebene der Systeme genannt werden. Jeder Strahl eines Hauptpunktes hat mit seinem entsprechenden diesen Hauptpunkt gemein, und jede Gerade einer Hauptebene wird mit ihrer entsprechenden durch diese Haupt-Ebene verbunden; oder:

Jeder durch einen Hauptpunkt gehende oder in einer Hauptebene liegende Strahl ist ein Ordnungsstrahl.

Da je zwei Strahlenbündel P und P_1 und je zwei ebene Systeme, die in den räumlichen Systemen Σ und Σ_1 einander entsprechen, ebenfalls collinear sein müssen, so können wir auf Grund des zehnten Vortrages folgenden Satz aufstellen:

Die Ordnungsstrahlen, in welchen die Ebenen eines Strahlenbündels P von den homologen Ebenen des entsprechenden Bündels P_1 geschnitten werden, sind zugleich die sämtlichen Secanten einer Raumcurve III. Ordnung.

Die Ordnungsstrahlen, durch welche die Punkte einer Ebene π mit den homologen Punkten der entsprechenden Ebene π_1 verbunden werden, sind zugleich die sämtlichen Axen eines Ebenenbüschels III. Ordnung.

Dieser Satz erleidet nur dann eine Ausnahme, wenn links entweder der Strahl PP_1 sich selbst entspricht oder in einer Hauptebene liegt, und wenn rechts der Strahl $\pi\pi_1$ entweder mit seinem entsprechenden zusammenfällt oder durch einen Hauptpunkt hindurchgeht. Damit dieser Ausnahmefall, welcher auch im zehnten Vortrage ausdrücklich ausgeschlossen wurde, nicht zur Regel werde, wollen wir von jetzt an voraussetzen, dass weder jeder Ordnungsstrahl sich selbst entspreche, noch auch durch jeden Punkt des Raumes eine Haupt-Ebene hindurchgehe. Wir schliessen durch diese Annahme nur gewisse specielle Fälle aus, die wenig Interesse bieten; namentlich die Fälle, in welchen die collinearen Systeme einen Ebenenbüschel entsprechend gemein haben, oder auch involutorisch liegen.

Alle durch einen Punkt P gehenden Ordnungsstrahlen bilden eine Kegelfläche II. Ordnung,

Alle in einer Ebene π liegenden Ordnungsstrahlen bilden einen Strahlenbüschel II. Ord-

welche der Ordnungskegel
des Punktes P heissen soll.

nung, welcher der Ordnungs-
strahlenbüschel der Ebene π
heissen soll.

Durch die Kegelfläche II. Ordnung wird nämlich aus dem Punkte P die Raumcurve III. Ordnung projecirt, welche der Strahlenbündel P mit dem ihm entsprechenden Bündel P_1 erzeugt, und deren sämtliche Secanten zugleich Ordnungsstrahlen sind. Auch dieser Satz erleidet nur dann eine Ausnahme, wenn P auf einer sich selbst entsprechenden Geraden oder Ebene liegt, oder wenn π durch einen sich selbst entsprechenden Strahl oder Punkt hindurchgeht.

„Wenn ein Strahlenbüschel S I. Ordnung mehr als zwei „Ordnungsstrahlen enthält, so ist jedes Element desselben ein „Ordnungsstrahl, und sein Mittelpunkt liegt in einer Haupt- „Ebene, während gleichzeitig seine Ebene durch einen Haupt- „punkt hindurchgeht.“

Dem Strahlenbüschel S von Σ entspricht in Σ_1 ein Büschel S_1 . Liegen nun diese Büschel entweder in einer Ebene, oder concentrisch, oder perspectivisch, so wird jeder Strahl des Büschels S von dem entsprechenden Strahle des Büschels S_1 geschnitten; die durch den Mittelpunkt S gehenden Ordnungsstrahlen bilden also keine Kegelfläche, und die in der Ebene des Büschels liegenden Ordnungsstrahlen bilden keinen Büschel II. Ordnung. In diesen drei Fällen muss also der Mittelpunkt S auf einer Haupt-Ebene liegen und die Ebene S durch einen Hauptpunkt gehen, wie schon bei dem vorhergehenden Satze angeführt wurde. Findet keiner der genannten drei Fälle Statt, so sind in dem Ebenenbüschel $\overline{SS_1}$, durch welchen der Strahlenbüschel S aus dem Punkte S_1 projecirt wird, höchstens zwei Ebenen enthalten, welche durch die ihnen entsprechenden Strahlen des Büschels S_1 hindurchgehen. (I. Abth. pag. 45.)

Zwei Ordnungskegel P und Q , welche sich in einem Ordnungsstrahle $\overline{PQ}$ schneiden, haben ausserdem eine Raumcurve III. Ordnung k mit einander gemein, deren sämtliche Secanten aus Ordnungsstrahlen bestehen. Diese Curve soll eine Ordnungscurve des Strahlencomplexes genannt werden.

Zwei Ordnungsbüschel, welche die Schnittlinie ihrer Ebenen mit einander gemein haben, erzeugen im Allgemeinen einen Ebenenbüschel III. Ordnung, dessen sämtliche Axen aus Ordnungsstrahlen bestehen. Dieser Büschel soll ein Ordnungs-Ebenenbüschel des Strahlencomplexes genannt werden.

Es mögen die Ordnungskegel P , Q und ihre Schnittcurve k als Gebilde von Σ betrachtet werden, denen im Systeme Σ_1 die analogen Gebilde P_1 , Q_1 und k_1 entsprechen. Der Ordnungsstrahl $\overline{PQ}$ liegt mit dem entsprechenden Strahl $\overline{P_1 Q_1}$ in einer Ebene, und folglich haben auch die Ordnungsstrahlen $\overline{PP_1}$ und $\overline{QQ_1}$ einen Punkt Z_1 mit einander gemein, welcher den Curven k und k_1 angehört. Seien nun R und R_1 irgend zwei einander entsprechende Punkte von k und k_1 ; dann müssen die Geraden $\overline{PR}$ und $\overline{QR}$, weil sie den Ordnungskegeln P und Q angehören, von den resp. entsprechenden Geraden $\overline{P_1 R_1}$ und $\overline{Q_1 R_1}$ geschnitten werden. Die Ebenen $\overline{PRR_1 P_1}$ und $\overline{QRR_1 Q_1}$ gehen aber beide durch den Punkt Z_1 , und folglich geht auch ihre Schnittlinie $\overline{RR_1}$ durch Z_1 . Also jeder Strahl, welcher Z_1 mit irgend einem Punkte von k_1 verbindet, geht auch durch den entsprechenden Punkt von k und ist folglich ein Ordnungsstrahl. Dem Ordnungskegel $Z_1 k_1$ von Σ_1 , durch welchen k_1 aus Z_1 projecirt wird, entspricht ein Ordnungskegel Zk von Σ , welcher gleich Z_1 durch die Curve k geht, weil $Z_1 k_1$ die Curve k_1 enthält; und die Ordnungsstrahlen, welche die collinearen Strahlenbündel Z und Z_1 mit einander erzeugen, sind sonach die sämtlichen Secanten der Ordnungscurve k . Dem vorigen Satze links kann hiernach der folgende hinzugefügt werden:

„Auf jeder Ordnungscurve k des Strahlencomplexes giebt es zwei
 „einander entsprechende Punkte Z und Z_1 , durch deren homologe
 „Ebenen die sämtlichen Secanten der Curve erzeugt werden.“

Es werde eine beliebige andere Ordnungscurve l durch zwei einander entsprechende Strahlenbündel Y und Y_1 erzeugt; dann haben k und l jede Secante mit einander gemein, in welcher *gerade als* irgend eine Ebene des Büschels $\overline{YZ}$ von der entsprechenden Ebene des Büschels $\overline{Y_1 Z_1}$ geschnitten wird. Da diese Ebenenbündel projectivisch sind, so gilt aber der Satz:

Die sämtlichen Ordnungsstrahlen, welche von zwei homologen Ebenenbüscheln der collinearen Systeme erzeugt werden, bilden eine Kegelfläche II. Ordnung oder eine Regelschaar, je nachdem die Axen der Büschel Ordnungsstrahlen sind, also sich schneiden, oder nicht.

Die sämtlichen Ordnungsstrahlen, welche von zwei homologen geraden Gebilden der collinearen Systeme erzeugt werden, bilden einen Strahlenbüschel II. Ordnung oder eine Regelschaar, je nachdem die Träger der geraden Gebilde Ordnungsstrahlen sind oder nicht.

Folglich ist der wichtige Satz bewiesen:

Die gemeinschaftlichen Secanten von zwei beliebigen Ordnungscurven k und l bilden entweder eine Kegelfläche II. Ordnung oder eine Regelschaar.

Die gemeinschaftlichen Axen von zwei beliebigen Ordnungsebenenbüscheln bilden entweder einen Strahlenbüschel II. Ordnung oder eine Regelschaar.

Wir können auch sagen: Durch zwei beliebige Ordnungscurven k und l kann stets eine geradlinige Fläche II. Ordnung gelegt werden.

Beiläufig ergibt sich leicht die Anzahl der Hauptpunkte und Hauptebenen des Strahlencomplexes. Jeder durch einen Hauptpunkt gehende Strahl ist ein Ordnungsstrahl; also:

Jeder Ordnungskegel geht durch die sämtlichen Hauptpunkte des Strahlencomplexes; die Hauptpunkte liegen folglich auch auf jeder Ordnungscurve, in welcher irgend zwei Ordnungskegel sich schneiden.

Jeder Ordnungs-Strahlenbüschel hat mit den sämtlichen Hauptebenen je einen Strahl gemein; die Hauptebenen gehören folglich auch jedem Ordnungs-Ebenenbüschel an, welchen irgend zwei Ordnungs-Strahlenbüschel erzeugen.

Werden nun auf einem Ordnungskegel P , dessen Mittelpunkt nicht sich selbst entspricht, zwei Ordnungscurven construiert, so können dieselben ausser dem Punkte P nicht mehr als vier Punkte A, B, C, D , mit einander gemein haben, weil sie sonst zusammenfallen würden (pag. 76); d. h.:

„Der Strahlencomplex hat höchstens vier Hauptpunkte A, B, C, D und höchstens vier Hauptebenen $\overline{ABC}, \overline{ABD}, \overline{ACD}$ und $\overline{BCD}$.“

Natürlich können auch weniger als vier, es können unter Umständen gar keine Hauptpunkte und Hauptebenen vorhanden sein. Wenn aber vier Hauptpunkte vorkommen, so bilden dieselben ein Haupt-Tetraeder und die Flächen dieses Tetraeders sind zugleich die Hauptebenen des Strahlencomplexes.

Ein Strahlencomplex ist völlig bestimmt, sobald von demselben irgend zwei Ordnungscurven k und l gegeben sind.

Der Ordnungskegel jedes auf k oder l gelegenen Punktes ist durch die Ordnungscurven völlig bestimmt; je zwei solche Ordnungskegel, deren Mittelpunkte auf einer der gemeinschaftlichen Secanten von k und l liegen, schneiden sich aber in einer neuen, von k und l verschiedenen Ordnungscurve, und mittelst der gegebenen

lassen sich somit unendlich viele neue Ordnungscurven finden. Jede derselben hat mit einer beliebig angenommenen Ebene π mindestens eine Secante gemein, welche zu dem Ordnungs-Strahlenbündel der Ebene gehört; und da dieser ein Bündel II. Ordnung ist, so ist er schon durch fünf seiner Strahlen bestimmt und construierbar. Durch k und l sind also auch die Ordnungsstrahlen jeder beliebigen Ebene π gegeben, und folglich alle Ordnungsstrahlen des Complexes.

Ein Strahlencomplex ist völlig bestimmt, sobald von demselben das Haupt-Tetraeder $ABCD$ und ein Strahl s gegeben ist, welcher keine Kante des Tetraeders schneidet.

Der Ordnungskegel jedes auf s gelegenen Punktes P ist durch seine fünf Strahlen s , PA , PB , PC und PD gegeben; je zwei solche Ordnungskegel schneiden sich aber in einer Ordnungscurve, und dieser Satz lässt sich sonach ohne Weiteres auf den vorhergehenden zurückführen. — Wird der Ordnungsstrahl s von der Haupt-Ebene BCD im Punkte S geschnitten, so ist jeder Strahl des in der Ebene As gelegenen Bündels S ein Ordnungsstrahl, weil dieser Bündel drei Ordnungsstrahlen enthält, nämlich SA , s und seinen in der Haupt-Ebene BCD gelegenen Strahl. Wir schliessen daraus:

Zwei Ordnungskegel, deren Mittelpunkte mit einem Hauptpunkte A in einer Geraden liegen, werden von der gegenüber liegenden Haupt-Ebene BCD in einer und derselben Curve II. Ordnung geschnitten.

Zwei Ordnungsstrahlenbündel, deren Ebenen sich auf einer Haupt-Ebene BCD schneiden, werden aus dem gegenüber liegenden Hauptpunkte A durch einen und denselben Ebenenbündel II. Ordnung projecirt.

„Zu jeder Geraden g , welche durch einen Hauptpunkt A geht, und in einer Haupt-Ebene ACD liegt, kann eine Gerade h construirt werden, welche in der Haupt-Ebene BCD liegt, und durch den Hauptpunkt B geht, so dass jeder Strahl, welcher sowohl von g als auch von h geschnitten wird, ein Ordnungsstrahl ist.“

Diese Sätze erleichtern bedeutend die Construction eines Strahlencomplexes, von welchem das Haupt-Tetraeder $ABCD$ und ausserdem irgend ein Ordnungstrahl s gegeben ist, welcher keine Kante des Tetraeders schneidet.

Wir können für diesen Fall auch leicht zwei räumliche Systeme collinear so auf einander beziehen, dass sie den gegebenen Strahlen-

complex erzeugen. Denn seien P und P_1 zwei ausserhalb der Haupt-Ebenen gelegene Punkte des Strahles s , so brauchen wir die Systeme nur so collinear auf einander zu beziehen, dass den fünf Punkten A, B, C, D, P des einen die resp. Punkte A, B, C, D, P_1 des anderen entsprechen. Alsdann entsprechen die vier Punkte A, B, C, D sich selbst und sind Hauptpunkte, und der Strahl s ist ein Ordnungsstrahl, weil er zwei homologe Punkte der collinearen Systeme mit einander verbindet; und folglich ist der Strahlencomplex, welchen die collinearen Systeme erzeugen, kein anderer als der gegebene. Da wir P und P_1 ganz beliebig auf s angenommen haben, so lassen sich zwei räumliche Systeme auf unendlich viele Arten collinear auf einander beziehen, so dass sie den Strahlencomplex erzeugen.

Dieses wichtige Ergebniss lässt sich auch folgendermassen ableiten, möge nun der Strahlencomplex ein Haupt-Tetraeder besitzen, oder nicht. Wir können den Satz aufstellen:

Sollen zwei räumliche Systeme collinear auf einander bezogen werden, so dass sie einen gegebenen Strahlencomplex erzeugen, so kann man irgend zwei Punkte P und P_1 , die auf einem Ordnungsstrahle liegen, oder irgend zwei Ebenen, die sich in einem Ordnungsstrahle schneiden, oder endlich irgend zwei in einer Ebene gelegene Ordnungsstrahlen als entsprechende einander zuweisen. Dadurch ist aber zu jedem Elemente des einen räumlichen Systemes das entsprechende Element des anderen völlig bestimmt.

Die Punkte P und P_1 , die in den räumlichen Systemen Σ und Σ_1 einander entsprechen sollen, sind die Mittelpunkte von zwei Strahlenbündeln, deren collineare Verwandtschaft durch den gegebenen Strahlencomplex festgestellt wird. Nämlich jeder Ordnungsstrahl von P liegt mit dem entsprechenden des Bündels P_1 in einer Ebene; und die Ordnungskegel P und P_1 , welche den Strahl $\overline{PP_1}$ und also noch eine durch P und P_1 gehende Raumcurve k III. Ordnung mit einander gemein haben, sind also in der Weise projectivisch auf einander zu beziehen, dass je zwei homologe Strahlen derselben sich auf der Ordnungcurve k schneiden. Dadurch sind zugleich die Strahlenbündel P und P_1 collinear auf einander bezogen, so dass je zwei homologe Ebenen derselben eine Secante von k mit einander gemein haben.

Sei nun l irgend eine von k verschiedene Ordnungcurve des Strahlencomplexes, und seien Q und Q_1 die noch unbekannten Mittelpunkte der collinearen Strahlenbündel von Σ und Σ_1 , durch

welche die sämmtlichen Secanten der Raumcurve l III. Ordnung erzeugt werden (pag. 119). Die gemeinschaftlichen Secanten von k und l bilden entweder eine Regelschaar oder eine Kegelfläche II. Ordnung, und werden folglich aus P und P_1 durch zwei Ebenenbündel projecirt. Die Axen dieser Ebenenbündel sind entweder Leitstrahlen jener Regelschaar oder Strahlen jener Kegelfläche, und haben nur je einen (von der Spitze der Kegelfläche verschiedenen) Punkt mit der Curve l gemein (pag. 72). Wir müssen diese Punkte als Mittelpunkte der gesuchten Strahlenbündel Q und Q_1 annehmen, so dass $\overline{PQ}$ und $\overline{P_1Q_1}$ die Axen jener Ebenenbündel sind. Beziehen wir nämlich die beiden Strahlenbündel, welche diese beiden Punkte Q und Q_1 zu Mittelpunkten haben, collinear so auf einander, dass je zwei homologe Ebenen derselben sich in einer Secante der Ordnungcurve l schneiden, so entspricht dem gemeinschaftlichen Ebenenbündel $\overline{PQ}$ der Bündel P und Q der gemeinschaftliche Ebenenbündel $\overline{P_1Q_1}$ der Bündel P_1 und Q_1 ; und dieses ist nothwendig und hinreichend, damit durch die Bündel P und Q von Σ und die ihnen collinearen Bündel P_1 und Q_1 von Σ_1 auch die räumlichen Systeme Σ und Σ_1 collinear auf einander bezogen werden (vergl. pag. 20). Der von Σ und Σ_1 erzeugte Strahlencomplex ist, wie verlangt wird, identisch mit dem gegebenen, weil es mit letzterem alle Secanten der Ordnungscurven k und l gemein hat (pag. 120).

Beiläufig ergibt sich noch aus dem Beweise:

„Zwei beliebige Raumcurven III. Ordnung k und l , deren gemeinschaftliche Secanten entweder eine Regelschaar oder eine Kegelfläche II. Ordnung bilden, können stets als Ordnungscurven eines durch sie bestimmten Strahlencomplexes betrachtet werden.“

Werden nicht zwei Punkte P und P_1 eines Ordnungsstrahles, sondern irgend zwei sich schneidende Ordnungsstrahlen s und s_1 , oder auch irgend zwei Ebenen π und π_1 als homologe Elemente der collinearen Systeme Σ und Σ_1 angenommen, so können wir diese Fälle sofort auf den zuerst betrachteten zurückführen. Nämlich jedem Punkte P von s entspricht derjenige Punkt P_1 von s_1 , welcher mit P durch einen dritten Ordnungsstrahl der Ebene $\underline{ss_1}$ verbunden wird; und weil der in $\underline{ss_1}$ liegende Ordnungs-Strahlenbündel als Theil des Strahlencomplexes gegeben ist, so kann zu P der entsprechende Punkt P_1 sofort gefunden werden. Ebenso kann zu jedem Ordnungsstrahle s der Ebene π der ent-

sprechende Strahl s_1 von π_1 leicht gefunden werden, da beide sich auf der Geraden $\pi\pi_1$ schneiden müssen; dem Schnittpunkte P von zwei Ordnungsstrahlen der Ebene π entspricht aber der Schnittpunkt P_1 der homologen Ordnungsstrahlen von π_1 .

Construiren wir zu einem räumlichen Systeme Σ alle möglichen collinearen Systeme, welche mit Σ einen gegebenen Complex von Ordnungsstrahlen erzeugen, so liegen die sämtlichen Punkte, welche einem gegebenen Punkte P von Σ entsprechen, auf dem Ordnungskegel P , weil jeder derselben mit P durch einen Ordnungsstrahl verbunden ist; die sämtlichen Ebenen, welche einer gegebenen π von Σ entsprechen, gehen durch die Ordnungsstrahlen der Ebene π ; von den Ordnungsstrahlen, welche einem gegebenen Ordnungsstrahle s von Σ entsprechen und also denselben schneiden, bilden alle diejenigen, welche durch einen beliebigen Punkt von s gehen, eine Kegelfläche II. Ordnung, und diejenigen, welche in einer beliebigen Ebene von s liegen, einen Strahlenbüschel II. Ordnung.

Je zwei dieser zu Σ collinearen räumlichen Systeme sind auch zu einander collinear; sie erzeugen jedoch nur in besonderen Fällen denselben Strahlencomplex mit einander, welchen jedes von ihnen mit Σ erzeugt. Sollen nämlich je zwei der collinearen Systeme Σ , Σ_1 und Σ_2 einen gegebenen Strahlencomplex erzeugen, und sind P , P_1 , P_2 drei homologe Punkte, π , π_1 , π_2 drei homologe Ebenen, und s , s_1 , s_2 drei homologe Ordnungsstrahlen von resp. Σ , Σ_1 und Σ_2 , so muss Folgendes eintreten: Die homologen Punkte P , P_1 , P_2 liegen entweder auf einem und demselben Ordnungsstrahle oder auf einer und derselben Ordnungscurve, weil die Ordnungskegel P und P_1 die resp. Ordnungsstrahlen $\overline{PP_2}$ und $\overline{P_1P_2}$ enthalten, also beide durch P_2 gehen, und ausserdem den Ordnungsstrahl $\overline{PP_1}$ mit einander gemein haben; ebenso liegen die homologen Ebenen π , π_1 , π_2 entweder in einem und demselben Ordnungs-Ebenenbüschel, weil jede ihrer drei Schnittlinien ein Ordnungsstrahl sein muss, oder sie schneiden sich in einem und demselben Ordnungsstrahle; endlich müssen die homologen Ordnungsstrahlen s , s_1 , s_2 , von denen jeder die beiden anderen schneiden soll, entweder in einer und derselben Ebene liegen und zwar in dem Ordnungs-Strahlenbüschel dieser Ebene, oder sie müssen durch einen und denselben Punkt gehen und folglich einem Ordnungskegel angehören. Die Möglichkeit dieser beiden Fälle springt aus dem Beweise des Satzes (pag. 122) in die Augen; also:

Werden zu einem räumlichen Systeme Σ alle diejenigen collinearen Systeme construirt, welche nicht bloss mit Σ , sondern auch paarweise mit einander einen gegebenen Strahlencomplex erzeugen, so findet einer der folgenden beiden Fälle Statt:

- 1) Entweder bildet jede Ebene von Σ mit allen ihr entsprechenden Ebenen einen Büschel I. Ordnung, dessen Axe ein Ordnungsstrahl ist, und jeder Punkt von Σ bildet mit seinen homologen Punkten eine Ordnungscurve, sowie jeder Ordnungsstrahl mit seinen homologen einen Ordnungskegel des Strahlensystemes;
- 2) Oder jede Ebene von Σ bildet mit den ihr entsprechenden Ebenen einen Ordnungs-Ebenenbüschel, jeder Punkt von Σ liegt mit allen seinen homologen Punkten auf einem Ordnungsstrahle, und jeder Ordnungsstrahl von Σ bildet mit seinen homologen Strahlen einen Ordnungs-Strahlenbüschel.

Sechzehnter Vortrag.

Flächenbüschel zweiter Ordnung. Raumcurven und Ebenenbüschel vierter Ordnung.

Die Sätze des letzten Vortrages gewinnen an Anschaulichkeit und Bedeutsamkeit, wenn wir sie bei der Untersuchung der Flächen II. Ordnung in Anwendung bringen. Zu dem Ende betrachten wir zwei räumliche Polarsysteme, als deren Ordnungsflächen zwei beliebige Flächen II. Ordnung Φ und Φ_1 angenommen werden können, die weder Kegelflächen sind noch in Ebenen zerfallen. Jeder Punkt des Raumes hat alsdann zwei Polar-Ebenen, jede Ebene hat zwei Pole und jede Gerade zwei Polaren.

Eine Gerade g soll ein Ordnungsstrahl der Polarsysteme genannt werden, wenn ihre beiden Polaren in einer Ebene γ liegen, also auch einen Punkt G mit einander gemein haben. Jedem Ordnungsstrahle g ist hiernach in beiden Polarsystemen sowohl eine Ebene γ als auch ein Punkt G conjugirt; auf g liegen die beiden Pole der Ebene γ , und in g schneiden sich die beiden Polar-Ebenen des Punktes G . Daraus folgt:

„Die beiden Polaren g_1 und g_2 eines Ordnungsstrahles g sind ebenfalls Ordnungsstrahlen der Polarsysteme.“

Denn suchen wir etwa zu g_1 die beiden Polaren, so fällt die eine mit g zusammen, die andere liegt mit g in einer Ebene, nämlich in der Polar-Ebene von G , weil g_1 durch G hindurchgeht.

„Die Ordnungsstrahlen, welche den Punkten (resp. den Ebenen) einer Geraden a in beiden Polarsystemen conjugirt sind, bilden entweder eine Kegelfläche (resp. einen Strahlenbüschel) II. Ordnung, oder eine Regelschaar, je nachdem die Gerade a ein Ordnungsstrahl ist oder nicht.“

Im ersten Fall schneiden sich die Polaren a_1 und a_2 von a , im zweiten nicht; dem geraden Gebilde a entsprechen aber in den Polarsystemen zwei zu a und folglich zu einander projectivische Ebenenbüschel a_1 und a_2 , und dem Ebenenbüschel a entsprechen zwei gerade Gebilde a_1 und a_2 , welche mit einander die im Satze genannten Strahlengebilde erzeugen. Ganz analog wird der Satz bewiesen:

Die sämtlichen Ordnungsstrahlen, welche den Punkten eines ebenen Systemes conjugirt sind, bestehen im Allgemeinen aus den Secanten einer Raumcurve III. Ordnung.

Die sämtlichen Ordnungsstrahlen, welche den Ebenen eines Strahlenbündels conjugirt sind, bestehen im Allgemeinen aus den Axen eines Ebenenbüschels III. Ordnung.

Eine Ausnahme tritt z. B. links nur dann ein, wenn das ebene System einen Punkt oder Strahl enthält, dessen beide Polaren zusammenfallen.

Die Ordnungsstrahlen von zwei räumlichen Polarsystemen bilden einen Strahlencomplex, welcher auch durch zwei collineare räumliche Systeme erzeugt werden kann, für welchen also alle Sätze des letzten Vortrages gelten.

Weisen wir die beiden Polar-Ebenen jedes Punktes einander als entsprechende zu, ebenso die beiden Polaren jeder Geraden und die beiden Pole jeder Ebene, so sind dadurch zwei räumliche Systeme Σ_1 und Σ_2 collinear auf einander bezogen, so dass sie die sämtlichen Ordnungsstrahlen erzeugen. Nämlich die räumlichen Systeme Σ_1 und Σ_2 sind collinear, weil sie zu einem und demselben dritten Σ , mit welchem sie die beiden Polarsysteme bilden, reciprok sind; und sie erzeugen die Ordnungsstrahlen der Polarsysteme, weil jede Gerade, welche die beiden Pole einer Ebene verbindet, oder in welcher die beiden Polar-Ebenen eines Punktes sich schneiden, ein Ordnungsstrahl ist.

Jeder Hauptpunkt des Strahlencomplexes ist somit in beiden Polarsystemen der Pol von einer und derselben Haupt-Ebene; und wenn der Strahlencomplex ein Haupt-Tetraeder besitzt, so ist dasselbe ein gemeinschaftliches Pol-Tetraeder beider Polarsysteme, indem jeder Eckpunkt von der ihm gegenüberliegenden Fläche der Pol ist. Wie im fünfzehnten Vortrage wollen wir alle speciellen Fälle ausschliessen, in welchen der Strahlencomplex mehr als vier Hauptpunkte besitzt, also annehmen:

Die beiden Polarsysteme sollen höchstens ein Pol-Tetraeder $A B C D$ mit einander gemein haben, so dass von keinem fünften Punkte die beiden Polar-Ebenen zusammenfallen.

Den Strahlen eines Ordnungskegels P sind die Punkte einer Geraden p und die Ebenen eines Büschels III. Ordnung conjugirt.

Den Strahlen eines Ordnungsstrahlenbüschels sind die Ebenen eines Ebenenbüschels I. Ordnung und die Punkte einer Raumcurve III. Ordnung conjugirt.

Seien π und π^1 die Polar-Ebenen des Punktes P und sei p deren Schnittlinie; dann liegen die Polaren jedes durch P gehenden Ordnungsstrahles in resp. π und π^1 , und da sie sich schneiden müssen, so liegt ihr gemeinschaftlicher Punkt in der Geraden p . Dem Ordnungskegel P entsprechen also zwei in resp. π und π^1 liegende Strahlenbüschel II. Ordnung, welche zu einander projectivisch sind und das gerade Gebilde p , ausserdem aber einen Ebenenbüschel III. Ordnung erzeugen, dessen Elemente den Ordnungsstrahlen von P conjugirt sind.

Den Punkten einer Ordnungcurve k sind die Ordnungsstrahlen eines ebenen Systemes α conjugirt, und den sämtlichen Secanten von k die Punkte von α .

Den Ebenen eines Ordnungs-Ebenenbüschels ε sind die Ordnungsstrahlen eines Punktes E conjugirt, und den sämtlichen Axen von ε die Ebenen des Bündels E .

Dieser Satz folgt aus einem früheren (pag. 119), kann aber auch direct bewiesen werden. Seien P, Q, R irgend drei Punkte der Ordnungcurve k , und seien M und M^1 die Pole der Ebene $\overline{PQR}$. Dann müssen die beiden Polaren der Geraden $\overline{PQ}$ durch resp. M und M^1 gehen und sich schneiden, weil $\overline{PQ}$ ein Ordnungsstrahl ist, und dasselbe gilt von den Polaren der Geraden $\overline{QR}$ und $\overline{RP}$. Dem Dreieck PQR entsprechen also in den beiden Polarsystemen zwei Dreikante M und M^1 , deren homologe Kanten sich paarweise

schneiden; und die homologen Seitenflächen derselben, welche von den Polar-Ebenen der Punkte P , Q , R gebildet werden, schneiden sich in den drei zu P , Q und R conjugirten Geraden, welche folglich ein Dreieck bilden. Wo also auch der Punkt R auf der Ordnungscurve k liegen möge, die ihm conjugirte Gerade r muss stets mit den beiden zu P und Q conjugirten Geraden in einer und derselben Ebene α liegen, also dem Ordnungsbüschel dieser Ebene angehören; und zugleich folgt aus dem vorhergehenden Satze, dass jeder durch R gehende Ordnungsstrahl einem Punkte von r conjugirt ist. Die Raumcurve III. Ordnung, deren sämtliche Secanten den Punkten des ebenen Systemes α conjugirt sind (pag. 126), ist folglich mit der Ordnungscurve k identisch, da sie alle ihre eigentlichen Secanten mit k gemein hat.

Wir bewiesen vorhin, dass die Ordnungsstrahlen von zwei räumlichen Polarsystemen durch zwei collineare Systeme Σ_1 und Σ_2 erzeugt werden, welche zu einem und demselben dritten Systeme Σ reciprok sind und mit diesem die beiden Polarsysteme bilden. Construiren wir jetzt ein viertes räumliches System Σ_3 , welches zu Σ_1 und Σ_2 collinear ist und mit jedem dieser Systeme die gegebenen Ordnungsstrahlen erzeugt, so müssen (pag. 125) entweder je drei homologe Ebenen von Σ_1 , Σ_2 und Σ_3 in einem und demselben Ordnungsstrahle sich schneiden, oder je drei homologe Punkte derselben liegen auf einem und demselben Ordnungsstrahle. In beiden Fällen lässt sich beweisen, dass auch Σ_3 zu dem ihm reciproken Systeme Σ involutorische Lage hat und mit letzterem ein drittes Polarsystem bildet.

Im ersteren Falle entsprechen jedem Punkte P von Σ drei Ebenen π_1 , π_2 und π_3 in resp. Σ_1 , Σ_2 und Σ_3 , welche sich in einem und demselben Ordnungsstrahle schneiden; und jedem Punkte R des letzteren entsprechen drei Ebenen ρ_1 , ρ_2 und ρ_3 , welche sich in einem durch P gehenden Ordnungsstrahle schneiden müssen, weil P und R in den gegebenen beiden Polarsystemen einander conjugirt sind. Da also auch in Σ_3 jedem der Punkte P und R von Σ eine durch den anderen gehende Ebene entspricht, so liegt das gerade Gebilde $\overline{PR}$ von Σ involutorisch zu dem ihm entsprechenden Ebenenbüschel $\overline{\pi_3 \rho_3}$ von Σ_3 . Ist in Σ ein ebenes System ε gegeben, welchem in Σ_3 ein Strahlenbündel E_3 entspricht, dessen Mittelpunkt nicht in ε liegt, so können auf diese Weise in ε unendlich viele gerade Gebilde angegeben werden, welche zu den entsprechenden Ebenenbüscheln von E_3 involutorische Lage

haben; woraus folgt (pag. 59), dass ε und E_3 involutorisch liegen. Und weil dieses für jedes solche ebene System von Σ und den entsprechenden Strahlenbündel von Σ_3 gilt, so haben auch Σ und Σ_3 involutorische Lage, wie behauptet wurde. — Für den zweiten der beiden genannten Fälle, welcher aus dem ersteren auch mittelst des Gesetzes der Reciprocität sich ergibt, kann der directe Beweis auf analoge Weise geführt werden.

Mit Berücksichtigung der letzten Sätze des fünfzehnten Vortrages (pag. 125) ergibt sich hieraus Folgendes:

Werden zu zwei gegebenen räumlichen Polarsystemen alle diejenigen Polarsysteme construirt, von denen jedes mit einem der übrigen oder der gegebenen denselben Complex von Ordnungsstrahlen erzeugt, wie die gegebenen Polarsysteme unter einander, so tritt einer der folgenden beiden Fälle ein:

- 1) *Entweder schneiden sich die Polar-Ebenen jedes beliebigen Punktes in einem und demselben Ordnungsstrahle; die Pole jeder beliebigen Ebene erfüllen im Allgemeinen eine Raumcurve III. Ordnung, deren sämtliche Secanten aus Ordnungsstrahlen bestehen, und die Polaren jedes Ordnungsstrahles bilden eine Kegelfläche II. Ordnung;*
- 2) *Oder die Polar-Ebenen jedes Punktes bilden im Allgemeinen einen Ebenenbüschel III. Ordnung, dessen sämtliche Axen aus Ordnungsstrahlen bestehen; die Pole jeder Ebene liegen auf einem und demselben Ordnungsstrahle, und die Polaren jedes Ordnungsstrahles bilden einen Strahlenbüschel II. Ordnung.*

Die Ordnungsflächen der Polarsysteme wollen wir unter den Namen Flächenbüschel und Flächenschaar II. Ordnung zusammenfassen; und zwar wollen wir sagen, sie bilden im ersteren Falle einen Flächenbüschel II. Ordnung, und im letzteren eine Flächenschaar II. Ordnung. Weil in beiden Fällen durch zwei Polarsysteme alle übrigen völlig bestimmt sind, so folgt:

Durch zwei Flächen II. Ordnung ist ein Flächenbüschel und eine Flächenschaar II. Ordnung bestimmt.

Da im ersteren Falle die Polar-Ebenen eines beliebigen Punktes P einen Ebenenbüschel I. Ordnung bilden, von welchem also im Allgemeinen eine einzige Ebene π durch P hindurchgeht, so liegt P auf der Ordnungsfläche desjenigen Polarsystems, in welchem P der Pol von π ist; nur wenn der Punkt P auf der Axe jenes Ebenenbüschels und folglich auch auf jeder seiner

Polar-Ebenen liegt, muss die Ordnungsfläche eines jeden der Polarsysteme durch P hindurchgehen. Die Pole jeder Ebene ε liegen im Allgemeinen auf einer Raumcurve III. Ordnung; und weil diese höchstens drei Punkte und mindestens einen Punkt mit ε gemein hat, so giebt es unter den Polarsystemen höchstens drei und mindestens eine, deren Ordnungsflächen die Ebene ε , und zwar in jenen Punkten, berühren. Also:

Von einem Flächenbüschel II. Ordnung geht durch einen beliebigen Punkt P nur eine einzige Fläche, falls nicht P auf jeder Fläche des Büschels liegt. Eine beliebige Ebene ε wird von höchstens drei Flächen des Büschels und von mindestens einer derselben berührt.

Von einer Flächenschaar II. Ordnung wird nur eine einzige Fläche von einer beliebigen Ebene π berührt, wenn nicht jede Fläche der Schaar von π berührt wird. Durch einen beliebigen Punkt gehen höchstens drei Flächen der Schaar, und mindestens eine.

Wenn zwei Flächen II. Ordnung sich schneiden, so geht hiernach jede Fläche des durch sie bestimmten Flächenbüschels durch die Schnittcurve hindurch. Diese Schnittcurve ist im Allgemeinen eine Raumcurve IV. Ordnung, welche mit keiner Ebene mehr als vier, also auch mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat. Nämlich die beiden Flächen II. Ordnung werden von einer Ebene in zwei Curven II. Ordnung geschnitten, welche mit einander höchstens vier Punkte gemein haben, wenn sie nicht völlig zusammenfallen. Die Curve IV. Ordnung kann, wie wir gesehen haben (pag. 29 und 74), auch in zwei Kegelschnitte, oder in eine Gerade und eine Raumcurve III. Ordnung, oder in lauter Gerade zerfallen; wir wollen hier auf diese speciellen Fälle nicht näher eingehen. — Die gemeinschaftlichen Berührungs-Ebenen von zwei Flächen II. Ordnung bilden im Allgemeinen einen Ebenenbüschel IV. Ordnung, von welchem durch keinen Punkt P mehr als vier Ebenen hindurchgehen. Nämlich die beiden Kegelflächen II. Ordnung, welche aus dem Punkte P den gegebenen Flächen II. Ordnung umschrieben werden können, haben höchstens vier gemeinschaftliche Berührungs-Ebenen, wenn sie nicht völlig zusammenfallen. — Ueber diese Raumcurven und Ebenenbüschel IV. Ordnung giebt uns der vorige Doppelsatz folgende Aufschlüsse:

Durch eine Raumcurve k IV. Ordnung, in welcher zwei

Einem Ebenenbüschel IV. Ordnung, welcher zwei Flächen

Flächen II. Ordnung F und F_1 sich schneiden, und durch einen beliebigen ausserhalb k gelegenen Punkt P kann eine Fläche II. Ordnung F_2 gelegt werden. Dieselbe gehört zu dem von F und F_1 bestimmten Flächenbüschel II. Ordnung.

II. Ordnung F und F_1 umschrieben ist, kann eine dritte Fläche II. Ordnung F_2 eingeschrieben werden, welche noch eine beliebige ausserhalb des Ebenenbüschels gegebene Ebene berührt. Die Fläche F_2 gehört zu der von F und F_1 bestimmten Flächenschaar.

Wählen wir links den Punkt P so, dass er mit zwei Punkten der Curve k in einer Geraden g liegt, so wird die Fläche F_2 eine geradlinige, weil sie drei und folglich alle Punkte von g enthält. Jede durch g gelegte Ebene, welche von k in zwei neuen Punkten Q und R geschnitten wird, hat mit F_2 ausser g die Gerade $\overline{QR}$ gemein; denn diese Gerade hat ausser den Punkten Q und R noch einen Punkt von g mit der Fläche F_2 gemein und liegt desshalb ganz in F_2 . Also:

„Alle Secanten $\overline{QR}$ der Raumcurve IV. Ordnung, welche von einer gegebenen Secante g ausserhalb der Curve geschnitten werden, gehören entweder einer Regelschaar an oder einer Kegelfläche II. Ordnung.“

Liegen jene Secanten auf einer Kegelfläche II. Ordnung, so ist der Mittelpunkt A derselben ein Hauptpunkt des Strahlensystems; denn auf jeder Secante giebt es einen Punkt, welcher von A durch zwei Punkte der Curve IV. Ordnung, und folglich durch jede der Flächen F und F_1 harmonisch getrennt ist, und alle diese vierten harmonischen Punkte befinden sich in der Polarebene des Punktes A in Bezug auf jede der Flächen F und F_1 . Umgekehrt:

Wenn zwei Flächen II. Ordnung, die ein gemeinschaftliches Pol-Tetraeder $ABCD$ besitzen, sich in einer Raumcurve k IV. Ordnung schneiden, so wird diese aus jedem Eckpunkte des Pol-Tetraeders durch eine Kegelfläche II. Ordnung projicirt.

einem Ebenenbüschel IV. Ordnung eingeschrieben sind, so wird dieser von jeder Seitenfläche des Pol-Tetraeders in einem Strahlenbüschel II. Ordnung geschnitten.

Nämlich jede Gerade, welche den Eckpunkt A mit irgend einem Punkte Q der Curve k verbindet, enthält noch einen zweiten Punkt R der Curve; und zwar sind Q und R harmonisch ge-

trennt durch den Punkt A und seine Polar-Ebene $\overline{BCD}$. Eine durch A gehende Secante g wird also von jeder anderen Secante, welche mit g in einer Ebene liegt, aber keinen Punkt der Curve k mit g gemein hat, im Punkte A geschnitten.

Zwei Raumcurven IV. Ordnung, k und l , haben höchstens acht Punkte mit einander gemein.

Zwei Ebenenbüschel IV. Ordnung haben höchstens acht Ebenen mit einander gemein.

Seien P , Q und R irgend drei gemeinschaftliche Punkte der Raumcurven k und l , dann kann die gemeinschaftliche Secante $\overline{PQ}$ mit den beiden Curven durch zwei geradlinige Flächen II. Ordnung verbunden werden (pag. 131), welche ausser der Secante $\overline{PQ}$ nur noch eine Raumcurve III. Ordnung gemein haben können. Diese Raumcurve III. Ordnung, von welcher $\overline{PQ}$ eine Secante ist (pag. 74), muss durch R und jeden anderen, von P und Q verschiedenen, gemeinschaftlichen Punkt von k und l hindurchgehen. Nun liefert uns aber die Secante $\overline{PR}$ auf ganz dieselbe Weise eine zweite Raumcurve III. Ordnung, welche ebenfalls durch alle, von P , Q und R verschiedenen Schnittpunkte der Curven k und l hindurchgeht. Zwei Raumcurven III. Ordnung, die nicht identisch sind, haben aber höchstens fünf Punkte mit einander gemein; also giebt es ausser P , Q und R noch höchstens fünf Punkte, welche auf beiden Raumcurven IV. Ordnung gleichzeitig liegen. Zugleich folgt aus dem Beweise:

„Wenn zwei Raumcurven IV. Ordnung acht gemeinschaftliche Punkte besitzen, und man verbindet sechs derselben durch eine Raumcurve III. Ordnung, und die beiden letzten durch eine Gerade, so ist diese Gerade eine Secante der Raumcurve III. Ordnung.“

Wenn in dem Beweise des vorhergehenden Satzes statt der Raumcurve IV. Ordnung l eine Raumcurve III. Ordnung nebst einer ihrer Secanten angenommen wird, so ergiebt sich auf demselben Wege:

„Eine Raumcurve III. Ordnung hat mit einer Raumcurve IV. Ordnung höchstens sechs Punkte gemein.“

Eine Raumcurve III. Ordnung wird daher von einer nicht durch sie hindurchgehenden Fläche II. Ordnung in höchstens sechs Punkten geschnitten.

Drei Flächen II. Ordnung, welche weder eine Gerade, noch eine Curve II., III. oder IV. Ord-

Drei Flächen II. Ordnung, deren gemeinschaftliche Berührungsebenen weder einen Büschel

nung mit einander gemein haben, besitzen höchstens acht gemeinschaftliche Punkte.

I., II., III. noch IV. Ordnung bilden, besitzen höchstens acht gemeinschaftliche Berührungsebenen.

Denn wenn eine der drei Flächen II. Ordnung von den beiden übrigen in Raumcurven IV. Ordnung geschnitten wird, so ist der Satz links eine unmittelbare Folge der vorhergehenden. Zerfällt aber eine oder jede der beiden Schnittcurven in Gerade oder Kegelschnitte, oder in eine Gerade und eine Raumcurve III. Ordnung, so ergibt sich der sehr leichte Beweis des Satzes theils aus dem Vorhergehenden, theils aus den bekanntesten Eigenschaften der Curven II., III. und IV. Ordnung.

Durch neun Punkte des Raumes kann im Allgemeinen nur eine einzige Fläche II. Ordnung gelegt werden.

An neun Berührungsebenen kann im Allgemeinen nur eine einzige Fläche II. Ordnung gelegt werden.

Gehen (links) mehrere Flächen II. Ordnung durch die gegebenen neun Punkte, so liegen diese auf einer Raumcurve IV. Ordnung, in welcher irgend zwei von jenen Flächen sich schneiden, und die auch in Linien von niedrigerer Ordnung zerfallen kann. Uebrigens muss bemerkt werden, dass bei besonderer Lage der neun Punkte, z. B. wenn sechs derselben in einer Ebene liegen, die Fläche II. Ordnung in ein System von zwei Ebenen ausarten kann.

Durch acht beliebige Punkte des Raumes, von denen keine fünf in einer Ebene und keine drei in einer Geraden liegen, kann im Allgemeinen eine einzige Raumcurve IV. Ordnung gelegt werden; denn wenn zwei solche Curven in jenen acht Punkten sich schneiden, so haben die Punkte eine besondere Lage, indem jede Raumcurve III. Ordnung, welche durch sechs derselben hindurchgeht, die Verbindungslinie der beiden letzten Punkte zur Secante hat. Wir können die Raumcurve IV. Ordnung als construirt ansehen, sobald irgend zwei Flächen II. Ordnung gegeben sind, welche sich in derselben schneiden; und solche Flächen erhalten wir durch Lösung der folgenden Aufgabe:

„Durch acht beliebig gegebene Punkte, von denen keine sechs in einer Ebene und keine vier in einer Geraden liegen, Regelflächen zu legen.“

Liegen irgend drei der gegebenen Punkte in einer Geraden g , so gehört dieselbe jeder der verlangten Regelflächen an. Wenn

gleichzeitig die übrigen fünf in einer Ebene ε liegen, also auf einem Kegelschnitt κ , der auch aus zwei Geraden bestehen kann, und wenn der Schnittpunkt von g und ε dem Kegelschnitt κ nicht angehört, so zerfällt jede durch die acht Punkte gelegte Fläche II. Ordnung in zwei Ebenen, von denen ε die eine ist; denn ε hat mit der Fläche II. Ordnung sechs Punkte gemein, die nicht auf einem Kegelschnitt liegen. Sind die acht Punkte auf vier, durch einen und denselben Punkt gehenden Geraden gelegen, von denen die eine drei jener Punkte enthält, so liegen diese Geraden auf allen durch die acht Punkte gehenden Flächen II. Ordnung, und letztere sind Kegelflächen. In jedem anderen Falle lässt sich die Aufgabe wie folgt lösen:

Im Allgemeinen können unter den acht Punkten sechs auf verschiedene Art so gewählt werden, dass von denselben keine vier in einer Ebene liegen. Wir verbinden diese sechs Punkte durch eine Raumcurve III. Ordnung, ziehen an dieselbe aus dem siebenten und achten Punkte Secanten und legen alsdann durch letztere und die Raumcurve III. Ordnung eine Regelfläche. Durch eine andere Gruppierung der gegebenen acht Punkte gelangen wir zu einer zweiten Regelfläche. Die verlangte Gruppierung ist nur dann zuweilen unausführbar, wenn die acht Punkte auf den vier Seiten a, b, c, d eines (sogenannten windschiefen) Vierecks liegen. In diesem Falle schneiden wir zwei Gegenseiten a und c des Vierecks durch irgend eine Gerade f , welche durch keinen der vier Eckpunkte hindurchgeht; die Regelschaar, welcher die drei Strahlen b, d, f angehören, liegt alsdann auf einer durch alle acht Punkte gehenden Regelfläche.

Durch neun beliebig gegebene Punkte eine Fläche II. Ordnung zu legen.

An neun beliebig gegebene Berührungs-Ebenen eine Fläche II. Ordnung zu legen.

Durch acht der gegebenen Punkte legen wir zwei Regelflächen F und F_1 , und suchen sodann diejenige Fläche F_2 des durch F und F_1 bestimmten Flächenbüschels, welche durch den neunten Punkt hindurchgeht. Wie diese Fläche F_2 am leichtesten construiert werden kann, werden wir unten (pag. 143) sehen.

Siebenzehnter Vortrag.

Projectivische Beziehungen der Flächenbüschel zweiter Ordnung und der Kegelschnittbüschel.

Im letzten Vortrage und am Ende des zwölften sind wir zu Büscheln von Flächen II. Ordnung gelangt, welche namentlich folgende Eigenschaften besitzen:

„Die Polar-Ebenen eines beliebigen Punktes P in Bezug auf
 „alle Flächen des Büschels bilden einen Ebenenbüschel I. Ordnung. Nur wenn P ein Hauptpunkt des Flächenbüschels ist,
 „fallen alle seine Polar-Ebenen zusammen.“

Wir wählen diesen Satz zum Ausgangspunkte einer Theorie der Flächenbüschel II. Ordnung. Durch das Reciprocitäts-Gesetz lassen sich alle gefundenen Sätze unmittelbar auf die Flächenschaaren II. Ordnung übertragen, von welchen wir übrigens im zwanzigsten Vortrag noch einen besonderen Fall untersuchen werden. Bereits im letzten Vortrage haben wir aus obigem Satze die Folgerung gezogen, dass durch jeden Punkt des Raumes, welcher nicht allen Flächen des Büschels angehört, eine einzige dieser Flächen hindurchgeht.

Wir wollen von zwei Punkten sagen, sie seien einander conjugirt hinsichtlich des Flächenbüschels II. Ordnung, wenn jeder derselben auf sämtlichen Polar-Ebenen des anderen liegt. Der obige Satz kann dann auch folgendermassen ausgesprochen werden:

„Zwei Punkte sind hinsichtlich des Flächenbüschels einander
 „conjugirt, sobald sie in Bezug auf irgend zwei Flächen des-
 „selben conjugirt sind.“

Jedem Punkte P des Raumes sind daher die sämtlichen Punkte einer Geraden p conjugirt, welche mit Hülfe von zwei beliebigen Flächen F und F_1 des Büschels construirt werden kann; nämlich in p schneiden sich die Polar-Ebenen des Punktes P hinsichtlich der beiden Flächen F und F_1 . Beschreibt nun P ein gerades Gebilde g , so beschreiben seine beiden Polar-Ebenen in Bezug auf F und F_1 zwei zu g projectivische Ebenenbüschel, und die

zu P conjugirte Gerade p beschreibt eine Kegelfläche II. Ordnung oder eine Regelschaar, je nachdem die Axen der beiden Ebenenbündel sich schneiden oder nicht, je nachdem also g ein Ordnungsstrahl des Flächenbündels II. Ordnung ist oder nicht. Daraus folgt:

„Die sämtlichen Geraden, welche den Punkten eines geraden Gebildes g conjugirt sind hinsichtlich des Flächenbündels, bilden eine zu g projectivische Kegelfläche II. Ordnung oder Regelschaar, je nachdem die Gerade g ein Ordnungsstrahl des Bündels ist oder nicht. Im ersteren Falle liegen auf der Kegelfläche II. Ordnung auch die Polaren von g hinsichtlich der Flächen des Bündels; im letzteren Falle sind die Polaren von g zugleich Leitstrahlen der Regelschaar. Statt der Kegelfläche II. Ordnung erhalten wir nur dann zwei Ebenen, wenn g einen Hauptpunkt des Flächenbündels enthält.“

Die Gerade g kann als Verbindungslinie von zwei beliebigen Punkten P und Q des Raumes betrachtet werden, denen zwei Gerade p und q conjugirt sind. Die Polare von g in Bezug auf eine beliebige Fläche F des Bündels liegt dann zufolge des letzten Satzes entweder auf einer durch p und q gehenden Kegelfläche II. Ordnung oder in einer Regelschaar, von welcher p und q zwei Leitstrahlen sind; ausserdem wird die Polare von g aus p und q durch zwei Ebenen projecirt, welche von P und Q die Polar-Ebenen sind hinsichtlich der Fläche F . Bekanntlich aber wird eine Kegelfläche II. Ordnung aus je zwei ihrer Strahlen, und eine Regelschaar aus je zwei ihrer Leitstrahlen durch zwei projectivische Ebenenbündel projecirt, so dass sich ergibt:

„Die beiden Ebenenbündel p und q , welche von den sämtlichen Polar-Ebenen der beliebig gegebenen Punkte P und Q gebildet werden, sind projectivisch auf einander bezogen, wenn je zwei Ebenen einander zugewiesen werden, welche von P und Q die Polar-Ebenen sind in Bezug auf eine und dieselbe Fläche des Flächenbündels.“

Wir können auf diesen Satz folgende Definition gründen:

„Vier Flächen des Bündels sollen vier harmonische Flächen genannt werden, wenn die vier Polar-Ebenen eines und folglich jedes beliebigen Punktes in Bezug auf diese Flächen einen harmonischen Ebenenbündel bilden.“

Natürlich sind auch hier die Hauptpunkte des Flächenbündels

ausgenommen, weil deren Polar-Ebenen zusammenfallen. Wir können nunmehr auf die Flächenbüschel II. Ordnung die allgemeine Definition der projectivischen Verwandtschaft anwenden (I. Abth. pag. 42), können sie also auf beliebige Elementargebilde projectivisch beziehen. Bilden z. B. die Polar-Ebenen eines Punktes P hinsichtlich des Flächenbüschels einen Ebenenbüschel I. Ordnung p , und weisen wir jeder Fläche F des Flächenbüschels diejenige Ebene von p zu, welche zum Punkte P die Polar-Ebene ist in Bezug auf F , so ist der Flächenbüschel projectivisch auf den Ebenenbüschel p bezogen. Und mit Hülfe des letzteren kann der Flächenbüschel auch auf jedes andere Elementargebilde projectivisch bezogen werden. Ohne Weiteres ergibt sich u. A.:

„Die Polaren einer Geraden hinsichtlich des Flächenbüschels bilden eine zu letzterem projectivische Kegelfläche II. Ordnung oder Regelschaar.“

Die Pole einer beliebigen Ebene hinsichtlich des Flächenbüschels construiren wir, indem wir die Eckpunkte P, Q, R eines Dreiecks in der Ebene annehmen und deren Polar-Ebenen bezüglich jeder Fläche des Büschels zum Durchschnitt bringen. Die drei Ebenenbüschel, welche von diesen Polar-Ebenen gebildet werden, sind zu dem Flächenbüschel und zu einander projectivisch; also:

„Die Pole einer beliebigen Ebene hinsichtlich des Flächenbüschels II. Ordnung bilden im Allgemeinen eine zu dem letzteren projectivische Raumcurve III. Ordnung. Den Punkten der Ebene sind die Secanten der Raumcurve conjugirt (pag. 75).“

Zu demselben Resultat gelangen wir auch, wenn wir zu jedem Punkte der Ebene die Polar-Ebenen bestimmen in Bezug auf irgend zwei Flächen des Büschels. Wir erhalten dann zwei collineare Strahlenbündel, welche die Raumcurve III. Ordnung und deren Secantensystem erzeugen. Geht die Ebene durch einen Hauptpunkt des Büschels, so tritt eine Ausnahme von dem Satze ein. Sei R dieser Hauptpunkt und ρ seine Polar-Ebene hinsichtlich aller Flächen des Büschels. Dann erzeugen die beiden Büschel von Polar-Ebenen der Punkte P und Q eine zum Flächenbüschel projectivische Kegelfläche II. Ordnung oder Regelschaar, welche mit ρ die sämtlichen Pole der gegebenen Ebene gemein hat; also:

„Die Pole einer Ebene, welche durch einen Hauptpunkt des

„Flächenbüschels geht, bilden einen zum Büschel projectivischen „Kegelschnitt.“

Auch hier tritt wieder eine leicht zu erkennende Ausnahme ein, wenn die Ebene zwei Hauptpunkte enthält, oder wenn sie eine Haupt-Ebene des Büschels ist.

Aus dem vorhergehenden Satze haben wir bereits im letzten Vortrage den Schluss gezogen, dass jede Ebene von mindestens einer Fläche und von höchstens drei Flächen des Büschels berührt wird. — Liegt die gegebene Ebene im Unendlichen, so fallen ihre Pole mit den Mittelpunkten der Flächen II. Ordnung zusammen; oder:

„Die Mittelpunkte aller Flächen des Büschels liegen auf einer „Raumcurve III. Ordnung oder auf einem Kegelschnitt, je nachdem der Büschel keinen oder einen unendlich fernen Hauptpunkt besitzt. Im Allgemeinen, ^{in einem solchen Falle} enthält deshalb der „Flächenbüschel II. Ordnung höchstens drei Paraboloiden und „mindestens ein solches.“

Der Schnitt des Flächenbüschels II. Ordnung mit einer beliebigen Ebene soll wieder ein Kegelschnittbüschel genannt werden. Für den Fall, dass die sämtlichen Flächen eine Raumcurve III. Ordnung und eine Secante derselben mit einander gemein haben, erhalten wir Kegelschnittbüschel, deren sämtliche Kegelschnitte mindestens einen Punkt mit einander gemein haben, und welche bereits früher (pag. 101 und 102) eingehend untersucht wurden. Im Allgemeinen braucht aber dieser Fall nicht einzutreten; denn auch die Flächen eines Flächenbüschels besitzen nicht immer gemeinschaftliche Punkte. Dagegen gelten (pag. 135) für alle Kegelschnittbüschel die schon bekannten Sätze, dass durch einen beliebigen Punkt ihrer Ebene entweder jeder Kegelschnitt des Büschels oder nur einer hindurchgeht, und dass zwei Punkte in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels einander conjugirt sind, sobald sie in Bezug auf irgend zwei derselben einander conjugirt sind. Wir können noch folgende Sätze hinzufügen (pag. 136):

„Die sämtlichen Punkte, welche hinsichtlich des Kegelschnittbüschels einem geraden Gebilde g conjugirt sind, bilden im Allgemeinen einen zu g projectivischen Kegelschnitt. Auf demselben liegen auch die Pole der Geraden g hinsichtlich des Büschels. Die Polaren von zwei beliebigen Punkten P und Q der Ebene hinsichtlich der sämtlichen Kegelschnitte bilden zwei Strahlenbüschel I. Ordnung. Dieselben sind

„projectivisch auf einander bezogen, wenn je zwei Strahlen einander entsprechen, welche von P und Q die Polaren sind in Bezug auf einen und denselben Kegelschnitt des Curvenbüschels.“

Vier Kegelschnitte eines Curvenbüschels II. Ordnung sollen vier harmonische Kegelschnitte genannt werden, wenn sie auf vier harmonischen Flächen eines Flächenbüschels II. Ordnung liegen. Die Polaren eines beliebigen Punktes der Ebene hinsichtlich der vier harmonischen Kegelschnitte bilden einen harmonischen Strahlenbüschel, wenn sie nicht ausnahmsweise zusammenfallen. Im Allgemeinen besitzt die Ebene eines Kegelschnittbüschels mindestens einen Punkt und höchstens drei Punkte, für welche die sämtlichen Polaren sich vereinigen; nämlich da die sämtlichen Geraden, welche hinsichtlich des Flächenbüschels II. Ordnung den sämtlichen Punkten der Ebene conjugirt sind, im Allgemeinen aus den Secanten einer Raumcurve III. Ordnung bestehen, so liegen in der Ebene höchstens drei derselben und mindestens eine.

Den Kegelschnittbüschel können wir auf ein beliebiges Elementargebilde projectivisch beziehen, so dass je vier harmonischen Kegelschnitten des ersteren stets vier harmonische Elemente des letzteren entsprechen. Wird z. B. von den sämtlichen Polaren eines Punktes eine jede demjenigen Kegelschnitt des Büschels zugewiesen, in Bezug auf welchen sie dem Punkte zugeordnet ist, so ist der von den Polaren gebildete Strahlenbüschel projectivisch auf den Kegelschnittbüschel bezogen; und mittelst eines solchen Strahlenbüschels kann dann auch jedes andere Elementargebilde projectivisch auf den Kegelschnittbüschel bezogen werden. Der letztere ist auch zu jedem Flächenbüschel II. Ordnung projectivisch, von welchem er ein Schnitt ist; denn je vier harmonischen Kegelschnitten des Curvenbüschels entsprechen die vier durch sie hindurchgehenden harmonischen Flächen des Flächenbüschels. Hier kann jedoch der beachtenswerthe Fall eintreten, dass nicht jede der Flächen II. Ordnung von der Ebene des Curvenbüschels geschnitten wird; so dass freilich jedem Kegelschnitt dieses Büschels eine der Flächen II. Ordnung entspricht, nicht aber jeder dieser Flächen einer von den Kegelschnitten. Alsdann sind die Strahlenbüschel, welche von den Polaren beliebiger Punkte in Bezug auf die Kegelschnitte gebildet werden, unvollständig und bestehen nur aus Winkeln; für diese Winkel gelten jedoch die vorhin angegebenen projectivischen Beziehungen. Und diejenigen Flächen

II. Ordnung, welche von der Ebene des Kegelschnittbüschels nicht getroffen werden, bestimmen gleichwohl in dieser Ebene ein Polarsystem, welches zwar keine Ordnungscurve besitzt, aber in vieler Hinsicht eine Curve II. Ordnung vollständig vertritt. Uebrigens kann der genannte Fall nur dann eintreten, wenn die Kegelschnitte keine gemeinschaftlichen Punkte besitzen.

Haben die sämtlichen Flächen eines Flächenbüschels II. Ordnung einen Punkt U mit einander gemein, so wird eine beliebige durch U gelegte Gerade g , die auf keiner der Flächen enthalten ist, von denselben in je einem von U verschiedenen Punkte geschnitten, und umgekehrt muss durch jeden solchen Punkt von g eine einzige Fläche des Büschels hindurchgehen. Ich behaupte nun:

„Wenn an jeder Fläche des Büschels in ihrem von U verschiedenen Schnittpunkte mit der Geraden g eine Berührungsebene construirt wird, so bilden alle diese Berührungsebenen einen Ebenenbüschel I. oder II. Ordnung, welcher zu dem geraden Gebilde g perspectivisch liegt.“

Jede dieser Berührungsebenen verbindet einen Punkt von g mit der ihm conjugirten Geraden. Ferner bilden alle Geraden, welche den Punkten von g conjugirt sind, eine zu g projectivische Kegelfläche II. Ordnung oder Regelschaar (pag. 136), und der Punkt U liegt auf dem ihm conjugirten Strahle dieses Gebildes. Im Falle der Kegelfläche II. Ordnung folgt daher der Satz aus einem früher bewiesenen (I. Abth. pag. 111). Im Falle der Regelschaar verbinden wir drei beliebige Punkte A, B, C des geraden Gebildes g mit den ihnen conjugirten Geraden durch Ebenen, die sich in einem Punkte S schneiden werden. Die Regelschaar wird aus S durch einen Ebenenbüschel I. oder II. Ordnung projecirt, welcher auch zu dem geraden Gebilde g projectivisch sein muss und zu demselben perspectivische Lage hat, weil vier Ebenen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte U, A, B, C von g hindurchgehen (I. Abth. pag. 108).

Jede Ebene des Büschels I. oder II. Ordnung enthält auch die Polare von g in Bezug auf diejenige Fläche II. Ordnung, welche von der Ebene berührt wird. Der Ebenenbüschel ist folglich auch zu der Kegelfläche II. Ordnung oder der Regelschaar perspectivisch, welche von den Polaren der Geraden g gebildet werden, und somit projectivisch zu dem Flächenbüschel II. Ordnung. Daraus folgt aber, dass auch das gerade Gebilde g projectivisch auf den Flächenbüschel bezogen ist, wenn jedem von U

verschiedenen Punkte von g die durch ihn gehende Fläche des Büschels zugewiesen ist. Nach der Analogie mit früheren Sätzen wollen wir in diesem Falle sagen, das gerade Gebilde g liege perspectivisch zu dem Flächenbüschel oder sei ein Schnitt desselben; wir erhalten dann den Satz:

Alle geraden Gebilde, welche je einen gemeinschaftlichen Punkt der Flächen II. Ordnung enthalten und keiner der Flächen angehören, werden von dem Flächenbüschel in projectivischen geraden Gebilden geschnitten; denn letztere sind auch zu dem Flächenbüschel projectivisch.

Für Kegelschnittbüschel haben wir denselben Satz der Hauptsache nach bereits früher (pag. 101) ausgesprochen, wenn auch in anderer Form. Der Beweis vereinfacht sich in dem speciellen Falle, wenn die Gerade g in einer Hauptebene des Flächenbüschels liegt.

Ein Flächenbüschel II. Ordnung wird von jeder Geraden s , die weder durch einen gemeinschaftlichen Punkt der Flächen hindurchgeht, noch auf einer dieser Flächen enthalten ist, in einem involutorischen geraden Gebilde geschnitten.

Seien A, A_1 ; B, B_1 und C, C_1 die drei Paar Schnittpunkte von s mit irgend drei Flächen α, β, γ des Büschels, und seien zunächst die Punkte A, A_1 nicht getrennt durch B und B_1 . Dann giebt es (I. Abth. pag. 119) in der Geraden s zwei Punkte M und N , welche sowohl durch A und A_1 , als auch durch B und B_1 harmonisch getrennt, und folglich hinsichtlich der Flächen α und β einander conjugirt sind. Diese Punkte müssen desshalb auch hinsichtlich jeder dritten Fläche γ des Büschels einander conjugirt und durch die Schnittpunkte C, C_1 von γ und s harmonisch getrennt sein. Damit ist aber bewiesen, dass der Flächenbüschel von s in einem involutorischen geraden Gebilde geschnitten wird, dessen Ordnungspunkte mit M und N zusammenfallen. Zugleich folgt:

„Die Gerade s wird von höchstens zwei Flächen des Büschels „berührt, und zwar in den Ordnungspunkten M und N des „involutorischen Gebildes s .“

Der Beweis des obigen Satzes ist offenbar für den Fall vollständig geführt, wenn von irgend zwei Flächen α und β des Büschels die eine ganz innerhalb oder ganz ausserhalb der anderen liegt, wenn also die sämtlichen Flächen II. Ordnung entweder gar keine gemeinschaftlichen Punkte besitzen oder in jedem solchen Punkte einander berühren. Wenn sie dagegen sich in

einer Linie schneiden, so kann der Fall eintreten, dass die Schnittpunkte A, A_1 durch B und B_1 von einander getrennt sind, so dass das involutorische Gebilde s , wenn es überhaupt existirt, keine Ordnungspunkte besitzt. Jede durch s gelegte Ebene schneidet alsdann den Flächenbüschel II. Ordnung in einem Büschel von Curven II. Ordnung, die mindestens zwei gemeinschaftliche Schnittpunkte besitzen. Dass nun s durch diesen Kegelschnittbüschel in einem involutorischen geraden Gebilde geschnitten wird, folgt sofort aus früheren Sätzen (pag. 101), sobald noch der Satz bewiesen ist:

„Ein Curvenbüschel II. Ordnung, dessen Kegelschnitte einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt U besitzen, kann stets als „Schnitt eines Flächenbüschels II. Ordnung betrachtet werden, „welcher aus geradlinigen, durch eine Raumcurve k III. Ordnung und eine Secante α derselben gehenden Flächen II. Ordnung gebildet wird.“

Seien α und β zwei beliebige Kegelflächen II. Ordnung, deren Mittelpunkte auf einer durch U gelegten Geraden a enthalten sind und durch welche irgend zwei Kegelschnitte des Curvenbüschels projecirt werden. Dann schneiden sich α und β in der Geraden a und ausserdem in einer Raumcurve k III. Ordnung, von welcher a eine Secante ist. Durch k und a kann nun ein Flächenbüschel II. Ordnung gelegt werden, zu welchem auch die beiden Kegelflächen α und β gehören; derselbe wird von der Ebene des Curvenbüschels II. Ordnung in einem zweiten Curvenbüschel II. Ordnung geschnitten, und es ist nur noch zu zeigen, dass jede Curve des einen Büschels auch dem anderen Curvenbüschel angehört. Sei C irgend ein Punkt der Ebene und seien γ und γ_1 die beiden durch ihn hindurchgehenden Curven der Büschel. Dann können wir in der Ebene unendlich viele Secanten s von C aus an die Kegelflächen α und β ziehen, so dass die Schnittpunkte von s mit α durch diejenigen von s mit β nicht getrennt sind. Für jede solche Secante ist aber bereits der Beweis geführt, dass dieselbe von beiden Curvenbüscheln in involutorischen geraden Gebilden geschnitten wird; und die so entstehenden involutorischen Gebilde sind identisch, weil zwei Punktenpaare, nämlich die Schnittpunkte von s mit α und β , in beiden vorkommen. Die Kegelschnitte γ und γ_1 haben desshalb nicht bloss den Punkt C , sondern auch den zu C zugeordneten Punkt C_1 von s mit einander gemein, und müssen, weil sich unzählig viele solche Punkte C_1 construiren

lassen, zusammenfallen. Damit ist aber die Behauptung bewiesen, dass der ursprünglich gegebene Curvenbüschel II. Ordnung ein Schnitt des Büschels geradliniger Flächen II. Ordnung sei.

Wir können nunmehr eine äusserst einfache Auflösung der schon früher (pag. 134) gestellten Aufgabe geben:

„Zu zwei beliebig gegebenen Flächen α , β II. Ordnung eine dritte zu construiren, welche durch einen willkürlich gegebenen Punkt P des Raumes hindurchgeht und dem durch α und β bestimmten Flächenbüschel angehört.“

Im Allgemeinen lassen sich durch P unendlich viele Secanten s an die beiden Flächen α und β ziehen. Jede derselben wird von dem Flächenbüschel in einem involutorischen geraden Gebilde geschnitten, welches durch die zwei Paar Schnittpunkte von s mit α und β völlig bestimmt ist. Sucht man nun in jedem dieser involutorischen Gebilde den zu P zugeordneten Punkt, so ist dieser auf der gesuchten Fläche enthalten. — Die Construction ist nur dann bisweilen nicht direct anwendbar, wenn jede der gegebenen Flächen α und β ganz ausserhalb der anderen liegt. In diesem Falle construiren wir zunächst auf die angegebene Weise innerhalb α irgend eine dritte Fläche β_1 des Büschels; alsdann können durch P unendlich viele Secanten an die beiden Flächen α und β_1 gezogen werden und die Construction ist anwendbar. Man kann von derselben bei der Aufgabe Gebrauch machen: „Durch neun Punkte eine Fläche II. Ordnung zu legen,“ deren Lösung am Ende des letzten Vortrages angegeben wurde.

Die projectivische Verwandtschaft, welche sich zwischen Flächenbüscheln II. Ordnung und beliebigen Elementargebilden aufstellen lässt, führt uns zu einer Fülle von neuen interessanten Aufgaben. Ich will von denselben nur noch die folgende behandeln:

„Von welcher Beschaffenheit ist die Fläche, welche ein Flächenbüschel II. Ordnung mit einem zu ihm projectivischen Ebenenbüschel I. Ordnung erzeugt?“

Der gesuchten Fläche gehört jeder Kegelschnitt an, den irgend eine Fläche des Flächenbüschels mit der ihr entsprechenden Ebene gemein hat. Auf derselben liegt desshalb die Axe des Ebenenbüschels und jeder gemeinschaftliche Punkt der Flächen II. Ordnung. Eine Gerade, welche die Axe des Ebenenbüschels schneidet,

hat ausser dem Schnittpunkt noch höchstens zwei Punkte mit der gesuchten Fläche gemein, wenn sie nicht ganz in dieselbe hineinfällt. Wir werden zeigen, dass die Fläche von der dritten Ordnung ist, so dass sie mit einer beliebigen Geraden g , die nicht ganz in sie hineinfällt, höchstens drei Punkte gemein hat, mindestens aber einen Punkt.

Die Gerade g wird von dem Ebenenbüschel in einem zu ihm und zum Flächenbüschel projectivischen geraden Gebilde geschnitten. Wir wollen nun zunächst beweisen:

„Wenn ein gerades Gebilde g auf einen Flächenbüschel II. Ordnung projectivisch bezogen ist, und man construirt zu jedem Punkte P von g die Polar-Ebene in Bezug auf die ihm entsprechende Fläche π des Büschels, so bilden alle diese Polar-Ebenen einen zu g projectivischen Ebenenbüschel II. Ordnung, und nur in ganz speciellen Fällen schneiden sie sich in einer und derselben Geraden.“

Zu dem Punkte P von g construiren wir die Polar-Ebene hinsichtlich der ihm entsprechenden Fläche π , indem wir die Polare von g in Bezug auf π mit derjenigen Geraden verbinden, welche dem Punkte P hinsichtlich des Flächenbüschels conjugirt ist. Den Punkten von g sind aber die Strahlen einer zu g projectivischen Regelschaar oder Kegelfläche II. Ordnung conjugirt; und die Polaren von g bilden eine zweite, zu dem Flächenbüschel projectivische Regelschaar resp. Kegelfläche II. Ordnung. Die beiden Strahlengebilde, welche wir so erhalten, sind aber projectivisch, weil das gerade Gebilde und der Flächenbüschel II. Ordnung projectivisch sind; und sie erzeugen (I. Abth. pag. 111) im Allgemeinen einen zu g projectivischen Ebenenbüschel II. Ordnung, weil im ersten Fall jede der Regelschaaren die Leitschaar der anderen ist und weil im zweiten Falle die beiden Kegelflächen II. Ordnung in einander liegen (pag. 136). Nur dann gehen die Verbindungs-Ebenen von je zwei einander entsprechenden Strahlen durch eine und dieselbe Gerade, wenn im letzteren Falle die Kegelflächen II. Ordnung involutorisch liegen. Wir wollen hierauf nicht näher eingehen, da der zweite Fall ohnehin nur dann eintritt, wenn g ein Ordnungsstrahl des Flächenbüschels ist.

Das gerade Gebilde g liegt nun entweder perspectivisch zu jenem Ebenenbüschel II. Ordnung, oder mindestens ein Punkt und höchstens drei Punkte von g sind in den ihnen entsprechen-

den Ebenen des Büschels enthalten (I. Abth. pag. 107) *). Jeder solche Punkt ist aber sich selbst conjugirt hinsichtlich der ihm entsprechenden Fläche des Flächenbüschels; oder:

„Wenn ein gerades Gebilde g auf einen Flächenbüschel II. Ordnung projectivisch bezogen ist, so liegen höchstens drei Punkte von g auf den ihnen entsprechenden Flächen II. Ordnung und mindestens ein Punkt, es sei denn, dass das gerade Gebilde zu dem Flächenbüschel perspectivische Lage hat.“

Daraus ergibt sich nunmehr als Lösung der vorhin gestellten Aufgabe der Satz:

Ein Flächenbüschel II. Ordnung erzeugt mit einem zu ihm projectivischen Ebenenbüschel I. Ordnung eine Fläche III. Ordnung, welche mit jeder nicht auf ihr gelegenen Geraden höchstens drei Punkte und mindestens einen Punkt gemein hat. Diese Fläche III. Ordnung geht durch alle gemeinschaftlichen Punkte der Flächen II. Ordnung und durch die Axe a des Ebenenbüschels. Von den Ebenen des letzteren wird sie ausserdem in Curven II. Ordnung geschnitten, und diese wiederum schneiden die Axe a in einem involutorischen geraden Gebilde.

Besteht der Ebenenbüschel aus den Polar-Ebenen eines beliebigen Punktes in Bezug auf die Flächen II. Ordnung, so folgt:

„Die Berührungspunkte aller Tangenten, welche aus einem beliebigen Punkte an die Flächen eines Flächenbüschels II. Ordnung gezogen werden können, liegen auf einer Fläche III. Ordnung. Dieselbe geht durch jenen Punkt und durch die ihm conjugirte Gerade a und hat mit einer durch a gelegten Ebene entweder nur diese Gerade a oder noch einen Kegelschnitt gemein; sie geht ausserdem durch jeden gemeinschaftlichen Punkt der Flächen II. Ordnung.“

*) Entsprechen der Geraden g zwei involutorisch liegende Kegelflächen II. Ordnung, so gelangen wir zu demselben Ergebniss wie folgt. Wir projectiren aus der Involutionssaxe der Kegelflächen das gerade Gebilde g durch einen Ebenenbüschel. Dieser ist auch zu den Kegelflächen projectivisch und folglich gehen höchstens drei seiner Ebenen durch die entsprechenden Strahlen der letzteren und mindestens eine (I. Abth. pag. 107).

Achtzehnter Vortrag.

Axen der Kegelschnitte, die auf einer Fläche II. Ordnung liegen. Normalen der Fläche II. Ordnung.

Wir wollen von den Sätzen des fünfzehnten Vortrages über die Strahlencomplexe eine weitere Anwendung machen, indem wir zeigen, dass die Normalen einer Fläche II. Ordnung und die Axen aller auf der Fläche enthaltenen Kegelschnitte einen solchen Strahlencomplex bilden. Wir werden dabei alle bis jetzt bekannten wichtigeren Sätze über diese Normalen und Axen in einem sehr einfachen Zusammenhange kennen lernen. Von der folgenden Untersuchung schliesse ich zunächst nur den Fall aus, in welchem die gegebene Fläche II. Ordnung eine Cylinderfläche ist.

Die Polare einer Normalen der Fläche II. Ordnung, d. h. einer Geraden, welche in einem Punkte der Fläche auf der Berührungsebene dieses Punktes senkrecht steht, liegt in dieser Berührungsebene, ist also zu der Normalen senkrecht. Suchen wir demnach sämtliche Gerade des Raumes, welche auf ihren Polaren senkrecht stehen, so sind unter ihnen auch die Normalen der Fläche II. Ordnung enthalten. Zu diesen Geraden gehören ausserdem die Axen eines jeden auf der Fläche gelegenen Kegelschnittes; denn eine solche Axe ist zu allen Geraden conjugirt, welche in der Ebene des Kegelschnittes zu ihr normal gezogen werden können; und weil der unendlich ferne Punkt, durch welchen diese Geraden gehen, auch auf der Polare der Axe liegen muss (pag. 36), so ist auch diese Polare senkrecht zu der Axe, ohne jedoch sie zu schneiden. Umgekehrt ist jede Gerade des Raumes, welche zu ihrer Polare senkrecht ist, die Axe eines Kegelschnitts der Fläche II. Ordnung oder doch eines ebenen Polarsystems, welches dem von der Fläche bestimmten räumlichen Polarsysteme angehört; und zwar geht die Ebene dieses Polarsystems durch die Gerade und ist parallel zu deren Polare. Wird aber die Gerade von ihrer Polare geschnitten, so liegen beide in einer Berührungsebene der Fläche II. Ordnung, und ihr Schnittpunkt fällt mit dem Berührungspunkte zusammen; der Kegelschnitt aber, von welchem sie als die Axen betrachtet werden können, reducirt sich auf

den Berührungspunkt oder auch auf eine oder zwei Gerade der Fläche II. Ordnung.

Die drei Hauptaxen jeder Kegelfläche II. Ordnung, welche der gegebenen Fläche II. Ordnung umschrieben ist, gehören gleichfalls zu den hier betrachteten Geraden. Denn weil diese drei Hauptaxen auf einander senkrecht stehen und einander paarweise conjugirt sind, so liegt die Polare einer jeden derselben in der Ebene der beiden andern und ist senkrecht zu der ihr zugeordneten Hauptaxe. Jede Gerade, welche zu ihrer Polare senkrecht ist, kann zugleich als Hauptaxe einer solchen umschriebenen Kegelfläche oder doch eines polaren Strahlenbündels betrachtet werden, welcher dem von der Fläche II. Ordnung bestimmten räumlichen Polarsysteme angehört; und zwar wird die Gerade im Mittelpunkte der Kegelfläche oder des Bündels von einer zu ihr senkrechten und durch die Polare gehenden Ebene geschnitten.

Wir wollen hiernach jede Gerade des Raumes, welche zu ihrer Polare senkrecht ist, eine Axe der Fläche II. Ordnung nennen; das Vorhergehende können wir dann wie folgt zusammenfassen:

Die Axen jedes auf der Fläche II. Ordnung gelegenen Kegelschnittes und die Hauptaxen jeder der Fläche umschriebenen Kegelfläche, so wie alle Normalen der Fläche II. Ordnung sind zugleich Axen dieser Fläche, d. h. senkrecht zu ihren resp. Polaren. Umgekehrt ist jede Axe der Fläche zugleich Axe eines ebenen Polarsystems und eines polaren Strahlenbündels, welche beide dem von der Fläche II. Ordnung bestimmten räumlichen Polarsysteme angehören.

Eine Fläche II. Ordnung, die keine Rotationsfläche ist, hat (nach pag. 40—43) entweder drei Symmetrie-Ebenen, die sich in den drei Hauptaxen rechtwinklig schneiden, und einen Mittelpunkt; oder sie hat nur zwei Symmetrie-Ebenen, die sich in einer Hauptaxe rechtwinklig schneiden, und ist ein Paraboloid, welches keinen Mittelpunkt besitzt. Weil die Geraden, welche auf einer Symmetrie-Ebene senkrecht stehen, zugleich auf ihren Polaren senkrecht sind, indem diese in der Symmetrie-Ebene liegen, so folgt:

Jede Gerade, welche in einer Symmetrie-Ebene liegt, oder zu einer solchen senkrecht steht, ist eine Axe der Fläche II. Ordnung.

Ein beliebiger Durchmesser der Fläche II. Ordnung steht im Allgemeinen nicht senkrecht zu den ihm conjugirten Ebenen;

doch giebt es in jeder solchen Ebene Strahlen, welche zu dem Durchmesser senkrecht stehen. Und weil diese Strahlen zugleich dem Durchmesser conjugirt sind, so schneidet diejenige durch letzteren gelegte Ebene, welche jenen Strahlen parallel läuft, die Fläche II. Ordnung in einem Kegelschnitt, von welchem der Durchmesser eine Axe ist; oder auch sie ist der Träger eines ebenen Polarsystems, zu dessen Axen der Durchmesser gehört. Also:

Jeder Durchmesser der Fläche II. Ordnung ist zugleich eine Axe derselben.

Wenn die Fläche II. Ordnung einen Mittelpunkt hat, so steht jede Hauptaxe derselben auf einer Symmetrie-Ebene senkrecht; ist aber die Fläche ein elliptisches oder hyperbolisches Paraboloid, so laufen mit ihrer Hauptaxe alle Durchmesser parallel. Aus den letzten beiden Sätzen folgt somit:

Jede Gerade, welche zu einer Hauptaxe parallel läuft, ist eine Axe der Fläche II. Ordnung.

Durch jeden Punkt P des Raumes gehen unendlich viele Axen der Fläche II. Ordnung, und eine derselben ist die Gerade n , welche durch den Punkt P senkrecht zu seiner Polar-Ebene π gelegt werden kann. Sei n_1 die in π liegende Polare von n , und suchen wir zunächst alle übrigen in π gelegenen Axen. Jede derselben steht auf der Polar-Ebene desjenigen Punktes senkrecht, in welchem sie von n_1 geschnitten wird; denn diese Polar-Ebene enthält ausser n noch die Polare der Axe, also zwei zu dieser Axe senkrechte Gerade. Wir finden also die sämtlichen in π gelegenen Axen, indem wir aus jedem Punkte der Geraden n_1 auf dessen Polar-Ebene eine Senkrechte fällen. Diese Polar-Ebenen bilden aber einen Büschel n , welcher zu dem geraden Gebilde n_1 projectivisch ist; und daraus folgt, dass jene Senkrechten entweder alle durch einen Punkt gehen, oder eine Parabel umhüllen. Wir können nämlich die unendlich ferne Gerade der Ebene π projectivisch so auf den Ebenenbüschel n beziehen, dass jede Ebene des Büschels senkrecht steht zu der Richtung, in welcher der entsprechende unendlich ferne Punkt liegt. Damit ist aber die unendlich ferne Gerade auch auf das gerade Gebilde n_1 projectivisch bezogen, und erzeugt mit demselben jene Schaar von Senkrechten; und diese berühren im Allgemeinen eine Curve II. Ordnung, zu deren Tangenten auch n_1 und die unendlich ferne Gerade gehören und welche daher eine Parabel ist. Diejenigen Axen,

welche durch den Punkt P hindurchgehen, sind die Polaren von den in π gelegenen Axen; und wenn letztere eine Parabel umhüllen, so müssen die ersteren auf einer Kegelfläche II. Ordnung liegen. Mit Berücksichtigung des Vorhergehenden können wir daher die Sätze aufstellen:

Die sämtlichen Axen, welche in einer gegebenen Ebene π liegen, umhüllen eine Parabel; dieselbe wird auch von jeder Geraden berührt, in welcher π von einer Symmetrie-Ebene geschnitten wird.

Die sämtlichen Axen, welche durch einen gegebenen Punkt P gehen, bilden eine Kegelfläche II. Ordnung; dieselbe geht durch die Senkrechten, welche aus P auf die Symmetrie-Ebenen der Fläche II. Ordnung gefällt werden können, so wie durch einen Durchmesser der Fläche II. Ordnung.

Die Parabel kann jedoch, wie schon bei dem Beweise dieser Sätze hervorgehoben wurde, sich auf Punkte reduciren, so dass wir statt ihrer Tangenten gewöhnliche Strahlenbüschel I. Ordnung erhalten; und ebenso kann die Kegelfläche P in Strahlenbüschel I. Ordnung zerfallen. Dieses muss für jeden Punkt P und jede Ebene π z. B. dann eintreten, wenn die Fläche II. Ordnung eine Rotationsfläche ist, weil alsdann unendlich viele Symmetrie-Ebenen vorhanden sind, die sich in einer Hauptaxe h schneiden. Den bisherigen Sätzen zufolge ist in diesem Falle jede Gerade, welche entweder mit der Rotationsaxe h in einer Ebene liegt, oder zu derselben senkrecht ist, eine Axe. Wir wollen hinfort die Rotationsflächen II. Ordnung von unserer Untersuchung ausschliessen, weil sie wenig Interesse bieten.

Werden auf einer beliebigen Axe, die weder ein Durchmesser der Fläche II. Ordnung, noch zu einer Symmetrie-Ebene senkrecht ist, zwei eigentliche, in keiner Symmetrie-Ebene gelegene Punkte M und N angenommen, so schneiden sich die Axenkegel, deren Mittelpunkte M und N sind, in der Geraden $\overline{MN}$ und folglich ausserdem in einer Raumcurve k III. Ordnung. Diese Curve k enthält drei unendlich ferne Punkte, nämlich die Pole der Symmetrie-Ebenen und unendlich fernen Punkte der Hauptaxen; denn die Geraden, welche aus M und N senkrecht zu den Symmetrie-Ebenen oder auch parallel zu den Hauptaxen gezogen werden können, sind ebenfalls Axen und schneiden einander paarweise in jenen drei unendlich fernen Punkten. Wenn die Fläche II. Ordnung einen Mittelpunkt besitzt, so ist auch dieser auf

der Raumcurve III. Ordnung enthalten. Jeder dritte Axenkegel, dessen Mittelpunkt O ebenfalls auf der Curve k liegt, muss durch dieselbe hindurchgehen, weil die fünf Axen auf demselben enthalten sind, durch welche O mit M und N und mit jenen drei unendlich fernen Curvenpunkten verbunden wird. D. h.:

Es giebt unendlich viele Raumcurven III. Ordnung von der Beschaffenheit, dass jede Tangente oder Secante derselben eine Axe der Fläche II. Ordnung ist. Alle diese Curven haben drei unendlich ferne Punkte, nämlich die Pole der Symmetrie-Ebenen und unendlich fernen Punkte der Hauptaxen, mit einander gemein, so wie den Mittelpunkt der Fläche II. Ordnung, falls ein solcher vorhanden ist.

Sind irgend zwei dieser Raumcurven III. Ordnung gegeben, also auch unendlich viele Axenkegel, die nicht alle durch eine und dieselbe Raumcurve hindurchgehen, so erzeugen diese Axenkegel unendlich viele andere solche Raumcurven. Durch dieselben sind in jeder beliebig gegebenen Ebene unzählige Axen bestimmt, also auch der Büschel II. Ordnung, welchen alle in der Ebene gelegenen Axen bilden; oder mit einem Wort die sämtlichen Axen der Fläche II. Ordnung sind durch jene zwei Raumcurven III. Ordnung völlig bestimmt. Liegen diese Curven auf einer und derselben Kegelfläche, und werden sie als Ordnungscurven von zwei collinearen räumlichen Systemen betrachtet, so erscheint folglich jede Axe der Fläche II. Ordnung als ein Ordnungsstrahl der collinearen Systeme, oder:

Die sämtlichen Axen einer Fläche II. Ordnung bilden einen Strahlencomplex, welcher auch durch collineare räumliche Systeme erzeugt werden kann. Hat die Fläche II. Ordnung einen Mittelpunkt, so bildet dieser mit den unendlich fernen Punkten der drei Hauptaxen das Haupt-Tetraeder des Strahlencomplexes; ist dagegen die Fläche II. Ordnung ein Paraboloid, so besitzt der Strahlencomplex nur drei Hauptpunkte, nämlich die unendlich fernen Pole beider Symmetrie-Ebenen und den unendlich fernen Punkt der Hauptaxe, sowie drei Haupt-Ebenen, nämlich die Symmetrie-Ebenen und die unendlich ferne Ebene.

Die Sätze des fünfzehnten Vortrages über die Vertheilung der Ordnungsstrahlen collinearer Systeme über den unendlichen Raum gelten also auch für die Axen einer Fläche II. Ordnung. So z. B. ist jetzt bewiesen, dass die Axen, welche durch einen Punkt P gehen oder in einer Ebene π liegen, nur dann zwei Strahlen-

büschel I. Ordnung bilden, wenn P in einer Hauptebene liegt, oder π durch einen Hauptpunkt hindurchgeht. Wir wollen jedoch die hieher gehörenden Sätze ihrer Wichtigkeit wegen noch einmal direkt beweisen.

„Die sämtlichen Axen, welche auf einer Durchmesser-Ebene der Fläche II. Ordnung liegen, bilden einen Durchmesserbüschel und einen Büschel paralleler Strahlen; und umgekehrt: Die sämtlichen Axen, welche eine gegebene Richtung haben, liegen in einer Durchmesser-Ebene der Fläche II. Ordnung.“

Ist nämlich π eine Durchmesser-Ebene, so liegt ihr Pol P unendlich fern in der Richtung der zu π conjugirten Sehnen. Die Parallelen, welche normal zu dieser Richtung in π gezogen werden können, sind Axen der Fläche II. Ordnung, und ebenso deren Polaren, welche durch P gehen und eine zweite Durchmesser-Ebene erfüllen. Beiläufig folgt:

Die Axen, welche durch irgend zwei auf einem Durchmesser gelegene Punkte hindurchgehen, sind paarweise parallel; die beiden Kegelflächen, auf welchen sie liegen, berühren sich in jenem Durchmesser und gehen durch denselben unendlich fernen Kegelschnitt.

Die sämtlichen Parabeln, welche von allen in parallelen Ebenen gelegenen Axen eingehüllt werden, sind Schnitte einer einzigen Kegel- resp. Cylinderfläche, deren Strahlen aus Durchmessern der gegebenen Fläche II. Ordnung bestehen.

„Die sämtlichen Axen, welche durch irgend einen Punkt P einer Symmetrie-Ebene γ hindurchgehen, bilden zwei Strahlenbüschel I. Ordnung, von denen der eine in γ liegt, der andere in einer zu γ senkrechten Ebene.“

Jeder durch P in der Ebene γ gezogene Strahl ist eine Axe der Fläche II. Ordnung, und die Kegelfläche P , auf welcher alle durch P gehenden Axen liegen, zerfällt also in zwei Strahlenbüschel. Sei nun s irgend eine Axe, welche von γ im Punkte P unter schiefen Winkeln geschnitten wird; dann ist der zweite dieser Axenbüschel in der Ebene gelegen, durch welche die Axe s senkrecht auf die Symmetrie-Ebene γ projecirt wird. Denn in dieser Ebene liegen ausser s noch zwei durch P gehende Axen, nämlich die Projection von s auf γ und die Normale zu γ im Punkte P . — Beiläufig folgt:

Ist die Gerade n senkrecht zu einer Symmetrie-Ebene γ , so

bilden die sämtlichen Axen, welche von n geschnitten werden, Kegelflächen II. Ordnung, deren Mittelpunkte in n liegen und welche mit γ eine und dieselbe gleichseitige Hyperbel gemein haben.

Nämlich eine beliebige dieser Kegelflächen hat mit γ eine Hyperbel gemein, welche durch den Schnittpunkt von n und γ und durch den Mittelpunkt der Fläche II. Ordnung hindurchgeht, wenn ein solcher vorhanden ist, und von deren Asymptoten die eine senkrecht, die andere parallel zu einer von γ verschiedenen Symmetrie-Ebene ist. Nach dem vorhergehenden Satze aber ist jede Gerade, welche einen Punkt der Hyperbel mit einem Punkte der Geraden n verbindet, ebenfalls eine Axe der Fläche II. Ordnung. Ebenso folgt der Satz:

Die sämtlichen Axen, welche die Symmetrie-Ebene γ in einer auf derselben gelegenen Geraden g schneiden, berühren entweder einen parabolischen Cylinder, welcher zu γ senkrecht ist; oder sie schneiden, wenn g zu einer zweiten Symmetrie-Ebene γ_1 normal ist, eine in γ_1 gelegene und zu γ senkrechte Gerade g_1 .

Wir können jetzt folgenden wichtigen Satz beweisen:

Sind von einer Fläche II. Ordnung gegeben die Symmetrie-Ebenen und eine Axe a , welche weder zu einer Hauptaxe senkrecht steht noch mit einer Hauptaxe in einer Ebene liegt, so sind alle Axen der Fläche völlig bestimmt, wie die folgende Construction zeigt.

Zunächst gehören alle Durchmesser der Fläche II. Ordnung, sowie alle Geraden, welche zu einer Symmetrie-Ebene senkrecht stehen oder in einer solchen liegen, zu den Axen der Fläche; ebenso alle Geraden g , welche zu der gegebenen Axe a parallel sind und mit derselben in einer Durchmesser-Ebene liegen. Sei P der Punkt, in welchem eine dieser Axen g von einer Symmetrie-Ebene γ geschnitten wird, so sind alle durch P gehenden Strahlen, welche mit g in einer zu γ senkrechten Ebene liegen, ebenfalls Axen der Flächen; und zwar begegnen diese Axen einer zweiten Symmetrie-Ebene γ_1 in den sämtlichen Punkten einer zu γ senkrechten Geraden. Bestimmen wir auf diese Weise alle Axen, welche von den Geraden g in Punkten der Symmetrie-Ebene γ geschnitten werden, so geht offenbar durch jeden Punkt P_1 der Symmetrie-Ebene γ_1 eine von diesen Axen; und mittelst dieser einen können wir alle übrigen durch P_1 gehenden Axen finden, weil dieselben theils in γ_1 , theils in einer zu γ_1 senkrechten

Ebene liegen. Weil nun jede Axe, welche nicht in γ_1 liegt, diese Symmetrie-Ebene in irgend einem Punkte P_1 schneiden muss, so können wir auf dem angegebenen Wege zu jeder beliebigen Axe der Fläche II. Ordnung gelangen.

Zu einem gegebenen Axencomplexen lassen sich unendlich viele Flächen II. Ordnung construiren; oder es giebt unendlich viele Flächen II. Ordnung, welche dieselben Axen besitzen wie eine gegebene.

Seien die Axen gegeben durch die Symmetrie-Ebenen und eine beliebig angenommene Axe a , wie im vorigen Satze. Wir errichten in einem beliebigen Punkte S von a eine zu a senkrechte Ebene ς , und construiren eine Fläche II. Ordnung, welche die gegebenen Symmetrie-Ebenen besitzt, und von der Ebene ς im Punkte S berührt wird. Da die Gerade a eine Normale der Fläche ist, so gehört sie zu den Axen derselben, und folglich auch jeder andere Strahl des gegebenen Axencomplexes. Und weil der Punkt S ganz beliebig auf a gewählt ist, und wir ausserdem statt a irgend eine andere Axe des Complexes bei dieser Construction benutzen können, so ist der Satz bewiesen, sobald wir gezeigt haben, dass die Construction jener Fläche II. Ordnung möglich ist.

Sind drei Symmetrie-Ebenen vorhanden, so bilden dieselben mit der unendlich fernen Ebene ein Pol-Tetraeder der gesuchten Fläche; und dieselbe ist völlig bestimmt als Ordnungsfläche des räumlichen Polarsystemes, in welchem ausser jenem Pol-Tetraeder noch der Pol S der Ebene ς gegeben ist (vergl. pag. 65). Die Fläche II. Ordnung geht durch die acht Eckpunkte des rechtwinkligen Parallelepipedes, dessen Seitenflächen zu den Symmetrie-Ebenen parallel laufen, dessen Diagonalen im Mittelpunkte M der Fläche sich halbiren und von welchem der Punkt S ein Eckpunkt ist. Die drei durch S gehenden Seitenflächen des Parallelepipedes schneiden die Fläche in Curven II. Ordnung, von welchen wir ausser S noch je drei Punkte und die in ς liegende Tangente von S kennen. Diese Curven sind also völlig bestimmt, und mit ihrer Hülfe kann jeder Kegelschnitt construirt werden, welchen irgend eine Ebene mit der Fläche II. Ordnung gemein hat.

Sind dagegen nur zwei Symmetrie-Ebenen und eine Hauptaxe vorhanden, so ist die gesuchte Fläche ein elliptisches oder ein hyperbolisches Paraboloid. Alsdann schneidet jede der beiden Ebenen, welche durch S parallel zu einer der Symmetrie-Ebenen

gelegt werden können, die Fläche in einer Parabel, deren Axe in der zweiten Symmetrie-Ebene liegt, und von welcher ausserdem der Punkt S und dessen in ε liegende Tangente bekannt ist. Jede dieser Parabeln kann also construirt werden. Wir bestimmen ferner einen Punkt S_1 so, dass die Gerade SS_1 auf der Hauptaxe senkrecht steht und von dieser halbirt wird; dann liegt auch S_1 auf der gesuchten Fläche. Durch S_1 und die beiden Parabeln, welche in S und in dem unendlich fernen Punkte der Hauptaxe sich schneiden, kann aber (pag. 29) eine einzige Fläche II. Ordnung hindurchgelegt werden. Dieselbe erfüllt offenbar alle Bedingungen, und ist wirklich ein Paraboloid, weil sie von der unendlich fernen Ebene in dem genannten Punkte der Hauptaxe berührt wird.

Von den Flächen II. Ordnung, welche einen gegebenen Axencomplex mit einander gemein haben, gehen durch jeden Punkt S des Raumes unendlich viele; denn jede von den Axen, welche durch S gehen und wie wir wissen eine Kegelfläche II. Ordnung bilden, steht im Punkte S zu einer jener Flächen normal. Die Berührungs-Ebenen dieser Flächen II. Ordnung im Punkte S umhüllen desshalb eine Kegelfläche II. Ordnung.

„Die Pole einer beliebigen Ebene ε in Bezug auf alle
„Flächen II. Ordnung, die einen gegebenen Axencomplex mit
„einander gemein haben, liegen in einer zu ε senkrechten Durch-
„messer-Ebene. Die Flächen werden von der Ebene ε in
„Curven II. Ordnung geschnitten, deren Axen eine Parabel
„umhüllen und deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen,
„nämlich auf der Directrix der Parabel.“

Denn jede Senkrechte, welche auf die Ebene ε aus einem ihrer Pole gefällt werden kann, ist eine Axe der Flächen II. Ordnung, und da alle diese Senkrechten zu einander parallel sind, so liegen sie in einer Durchmesser-Ebene (pag. 151). Dieselbe ist zu ε conjugirt hinsichtlich aller jener Flächen II. Ordnung und auf ihrer Schnittlinie mit ε liegen desshalb die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche ε mit den Flächen II. Ordnung gemein hat. Da die Axen jedes solchen Kegelschnittes einander im Mittelpunkte rechtwinklig schneiden und ausserdem eine Parabel berühren, (pag. 149), so folgt der letzte Theil des Satzes auch unmittelbar aus der Eigenschaft der Parabel:

„Zwei Parabeltangenten $\overline{MA}$ und $\overline{MB}$ stehen senkrecht auf ein-
„ander, wenn ihr Schnittpunkt auf der Directrix liegt.“

Die Polare $\overline{AB}$ von M geht durch den Brennpunkt F' der Parabel (Fig. 16) und bildet mit den Tangenten $\overline{MA}$ und $\overline{MB}$ dieselben Winkel, wie der durch M gehende Durchmesser $\overline{MC}$ (I. Abth. pag. 132). Daher ist:

$$\angle AMB = \angle MBA + \angle BAM = 90^\circ.$$

Neunzehnter Vortrag.

Aehnliche, concentrisch und ähnlich liegende Flächen zweiter Ordnung und deren Normalen.

Wir wollen jetzt von den Flächen II. Ordnung, denen ein gegebener Axencomplex zukommt, gewisse einfache Gruppen betrachten. Wir schicken folgenden Satz voraus:

„Sind von einer Fläche II. Ordnung die Symmetrie-Ebenen „und derjenige Durchmesser gegeben, welcher einer beliebig „angenommenen, zu keiner Hauptaxe parallelen oder senkrechten „Ebene ε conjugirt ist, so ist dadurch das ^{er} Axensystem ^{complex} der „Fläche II. Ordnung und der Mittelpunkt sowie die Axen „jedes auf der Fläche liegenden Kegelschnittes völlig bestimmt.

Der Pol der Ebene ε liegt auf dem ihr conjugirten Durchmesser; und weil die Senkrechte, welche aus diesem Pol auf ε gefällt werden kann, eine Axe der Fläche ist, so muss jede zu ε senkrechte Gerade, welche jenen Durchmesser schneidet, eine Axe sein. Der Axencomplex ist daher völlig bestimmt (pag. 152). Die Mittelpunkte aller Curven, in welchen die Fläche II. Ordnung durch parallele Ebenen geschnitten wird, liegen auf einem, den Ebenen conjugirten Durchmesser. Um den letzten Theil des Satzes zu beweisen, brauchen wir also nur noch zu zeigen, dass zu jeder durch einen gegebenen Punkt P gelegten Ebene der conjugirte Durchmesser eindeutig bestimmt ist; denn diejenigen beiden Axen der Ebene, welche auf diesem Durchmesser sich schneiden, sind zugleich die Axen des in der Ebene gelegenen Kegelschnitts der Fläche II. Ordnung und als Strahlen des Axensystems ebenfalls bekannt.

Nun ist zu jeder Hauptaxe der Fläche II. Ordnung diejenige Ebene des Punktes P conjugirt, welche auf der Hauptaxe senkrecht steht; und jeder Ebene von P , welche zu einer Symmetrie-Ebene parallel läuft, ist derjenige Durchmesser conjugirt, welcher zu dieser Symmetrie-Ebene senkrecht steht (und also im Falle des Paraboloides unendlich fern liegt in der anderen Symmetrie-Ebene). Für die zu ε parallele Ebene von P ist der conjugirte Durchmesser ebenfalls bekannt, und somit kennen wir bereits für vier Ebenen, von denen keine drei in einer und derselben Geraden sich schneiden, die conjugirten Durchmesser. Bekanntlich ist aber der Ebenenbündel P reciprok auf den Durchmesserbündel bezogen, wenn jeder Ebene von P der ihr conjugirte Durchmesser zugewiesen wird; und da wir zu vier Ebenen von P die conjugirten Durchmesser schon kennen, so ist die reciproke Verwandtschaft beider Bündel völlig festgestellt (pag. 7). Also kann wirklich zu jeder Ebene von P der conjugirte Durchmesser durch lineare Constructionen gefunden werden, und der Satz ist bewiesen.

Seien a und a_1 zwei parallele Axen des Complexes und mögen dieselben von einem beliebigen Durchmesser in den resp. Punkten A und A_1 geschnitten werden. Wir können dann zwei Flächen II. Ordnung construiren, denen der gegebene Axencomplex zugehört und auf welchen die resp. Axen a und a_1 in den Punkten A und A_1 normal stehen. Die Berührungs-Ebenen in A und A_1 sind also einander parallel und dem nämlichen Durchmesser AA_1 conjugirt. Aus dem Vorhergehenden folgt aber, dass alsdann je zwei Durchmesser, welche zu parallelen Ebenen in Bezug auf die beiden Flächen II. Ordnung conjugirt sind, zusammenfallen müssen. Wir wollen zwei solche Flächen zwei ähnliche, concentrisch und ähnlich liegende, oder kürzer zwei coaxiale und homothetische Flächen II. Ordnung nennen, und können die soeben gefundene Eigenschaft derselben wie folgt aussprechen:

Die Mittelpunkte der Curven II. Ordnung, in welchen die Flächen von irgend einer Ebene geschnitten werden, fallen auf einander, und daher auch die Axen dieser Curven. Die Berührungs-Ebenen der Punkte, in welchen die Flächen von irgend einem Durchmesser geschnitten werden, sind parallel. Werden nach beliebig gegebener Richtung sowohl in der einen als auch in der anderen Fläche parallele Sehnen gezogen, so liegen die Mittelpunkte aller dieser Sehnen in einer und derselben Durchmesser-Ebene.

Zwei dieser parallelen Sehnen gehen durch A und A_1 und schneiden die Flächen II. Ordnung zum zweiten Male in den resp. Punkten B und B_1 . Und da nicht bloss A und A_1 , sondern auch die Mittelpunkte der Sehnen AB und A_1B_1 auf einem Durchmesser liegen, so muss auch durch B und B_1 ein Durchmesser hindurchgehen. Haben die Flächen II. Ordnung einen Mittelpunkt M , so schliessen wir aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AMB und A_1MB_1 die Proportion:

$$MA : MA_1 = MB : MB_1; \text{ d. h. :}$$

Die sämmtlichen Durchmesser, welche von zwei ähnlichen, concentrisch und ähnlich liegenden Ellipsoiden oder Hyperboloiden geschnitten werden, werden von denselben proportional getheilt. Zwei solche Hyperboloide müssen desshalb auch demselben Asymptotenkegel eingeschrieben oder umschrieben sein.

Sind dagegen die Flächen II. Ordnung zwei Paraboloiden, so sind die Durchmesser einander parallel und das Viereck AA_1BB_1 ist ein Parallelogramm, dessen Gegenseiten AA_1 und BB_1 also einander gleich sind; oder:

Zwei coaxiale und homothetische Paraboloiden können mit einander zur Deckung gebracht werden, indem das eine in der Richtung der Durchmesser (um die Strecke AA_1) verschoben wird.

Zwei concentrische Hyperboloide, deren Asymptotenkegel zusammenfallen, haben auch alle ihre Axen mit einander gemein und werden von jeder Ebene in concentrischen Curven mit gemeinschaftlichen Axen geschnitten. Denn durch den Asymptotenkegel ist schon im Voraus zu jeder Ebene ε des Raumes der conjugirte Durchmesser bestimmt; dadurch aber auch der Mittelpunkt von ε und sämmtliche zu ε normale Axen, also auch der Axencomplex der Hyperboloide. Ein Hyperboloid ist völlig bestimmt, sobald der Asymptotenkegel und ausserhalb oder innerhalb desselben ein Punkt P des Hyperboloides gegeben ist. Denn jede durch P und den Mittelpunkt gehende Ebene, welche den Asymptotenkegel in zwei Strahlen a, b schneidet, hat mit dem Hyperboloid eine Hyperbel gemein, die durch P geht und von welcher a und b die Asymptoten sind; jede solche Hyperbel kann (I. Abth. pag. 93) leicht construirt werden.

Werden zu einer Fläche II. Ordnung alle möglichen coaxialen und homothetischen Flächen construirt, so geht von denselben eine durch jeden Punkt des Raumes, falls die gegebene Fläche ein Ellipsoid oder ein Paraboloid ist; ist sie dagegen ein ein-

faches oder zweifaches Hyperboloid, so geht durch jeden Punkt ausserhalb resp. innerhalb des Asymptotenkegels eine jener Flächen. Wir wollen im letzteren Falle alle übrigen Hyperboloide, die mit dem ersteren den Asymptotenkegel gemein haben, hinzufügen, so dass wir eine Schaar von ähnlichen einfachen und eine Schaar von ähnlichen zweifachen Hyperboloiden erhalten. Die sämtlichen Flächen II. Ordnung, die wir so zu einer gegebenen construiren können, und von denen durch jeden eigentlichen Punkt nur eine hindurchgeht, wollen wir einen Büschel coaxialer und homothetischer Flächen II. Ordnung nennen. Jede Ebene wird von einer einzigen Fläche des Büschels berührt, und zwar im gemeinschaftlichen Mittelpunkt der Curven II. Ordnung, in welchen die übrigen Flächen von der Ebene geschnitten werden; denn die Pole der Ebene in Bezug auf alle Flächen des Büschels liegen auf dem zu der Ebene conjugirten Durchmesser. Die Polar-Ebenen eines Punktes in Bezug auf alle Flächen des Büschels sind einander parallel und einem und demselben Durchmesser conjugirt. Jede Axe steht zu einer der Flächen in einem Punkte F normal; und dieser Fusspunkt F wird construirt, indem die Axe mit demjenigen Durchmesser zum Durchschnitt gebracht wird, dessen conjugirte Ebenen auf der Axe senkrecht stehen (pag. 151 und 156). Die sämtlichen Axen, welche in einer gegebenen Ebene liegen, bilden nach früheren Sätzen einen parabolischen Büschel II. Ordnung oder zwei Büschel I. Ordnung; also:

Die Normalen, welche in einer beliebigen Ebene π an einem Büschel coaxialer und homothetischer Flächen II. Ordnung gezogen werden können, berühren entweder eine Parabel, oder sie bilden einen gewöhnlichen und einen Parallel-Strahlenbüschel.

Die Fusspunkte dieser Normalen liegen in einer Geraden.

Nur wenn π eine Symmetrie-Ebene ist, gilt der Satz nicht; sein letzter Theil kann folgendermassen bewiesen werden. Alle Ebenen, welche zu den Tangenten der Parabel oder auch zu den Strahlen des gewöhnlichen Strahlenbüschels senkrecht stehen, sind parallel zu den Ebenen eines Ebenenbüschels I. Ordnung; die ihnen conjugirten Durchmesser liegen desshalb in einer Ebene und schneiden die Ebene π in den Punkten einer Geraden, welche also die Fusspunkte aller jener Normalen enthält. Besteht der Normalenbüschel aus parallelen Geraden, die in einer Durchmesser-Ebene liegen, so sind ihre Fusspunkte in demjenigen Durchmesser enthalten, welcher zu allen auf den Normalen senkrechten Ebenen conjugirt ist.

Nur wenn die Normalen zu einer Symmetrie-Ebene senkrecht stehen oder auch wenn sie Durchmesser der Flächen sind, fallen ihre sämtlichen Fusspunkte in einem einzigen Punkte zusammen, nämlich in dem unendlich fernen Pole der Symmetrie-Ebene oder aber in dem Mittelpunkte der Flächen II. Ordnung.

Weil eine Gerade mit keiner Fläche des Büschels mehr als zwei Punkte gemein haben kann, ohne ganz auf derselben zu liegen, so folgt:

In keiner Ebene π liegen mehr als zwei Normalen einer Fläche II. Ordnung.

Eine Ausnahme machen nur die Symmetrie-Ebenen, für welche der vorhergehende Satz nicht gilt, und bei den Kegelflächen II. Ordnung jede Normal-Ebene, welche durch einen Strahl der Kegelfläche senkrecht zu der zugehörigen Berührungs-Ebene gelegt werden kann. Sucht man zu den Geraden, welche auf der gegebenen Ebene π senkrecht stehen, die conjugirte Durchmesser-Ebene und bringt diese mit π zum Durchschnitt, so können die beiden in π gelegenen Normalen der Fläche II. Ordnung nur in denjenigen Punkten ihre Fusspunkte haben, welche die Fläche II. Ordnung mit jener Durchschnittslinie gemein hat. Diese Punkte sind sehr leicht zu construiren.

Die Normalen, welche aus einem beliebigen Punkte P an einen Büschel ähnlicher, concentrisch und ähnlich liegender Flächen II. Ordnung gezogen werden können, bilden eine Kegelfläche II. Ordnung (pag. 149), wenn P weder unendlich fern noch auf einer Symmetrie-Ebene liegt; ihre Fusspunkte bilden eine Raum-curve III. Ordnung, welche durch P und durch drei unendlich ferne Punkte hindurchgeht, nämlich durch die Pole der Symmetrie-Ebenen und die unendlich fernen Punkte der Hauptaxen, und welche auch den Mittelpunkt der Flächen II. Ordnung enthält, wenn ein solcher vorhanden ist.

Der zweite Theil des Satzes ergiebt sich auf folgendem Wege. Die sämtlichen Ebenen, welche zu den Strahlen der Kegelfläche P senkrecht stehen, sind parallel zu den Berührungs-Ebenen einer zweiten Kegelfläche II. Ordnung; beschreibt man nämlich um P als Mittelpunkt eine Kugelfläche, so ist jedem Strahle von P eine zu ihm senkrechte Durchmesser-Ebene der Kugel conjugirt, und daher muss, weil der Durchmesserbündel P ein polarer ist, der Kegelfläche P ein ihm projectivischer Ebenenbüschel II. Ordnung conjugirt sein, welcher jene zweite Kegelfläche einhüllt. Diejenigen

Durchmesser der gegebenen ähnlichen und ähnlich liegenden Flächen II. Ordnung, welche zu den Ebenen jenes Büschels II. Ordnung conjugirt sind, bilden somit gleichfalls eine Kegel- oder Cylinderfläche M II. Ordnung, welche mit dem Normalenkegel P die im Satze genannte Raumcurve III. Ordnung erzeugt. Die Kegelflächen M und P haben nämlich den durch P gehenden Durchmesser $\overline{MP}$ mit einander gemein; denn alle Axen des Flächenbüschels, welche auf einer zu $\overline{MP}$ conjugirten Ebene senkrecht stehen, schneiden den Durchmesser $\overline{MP}$ und eine derselben gehört sonach der Kegelfläche P an. Da nun jede Normale n in ihrem Fusspunkte von demjenigen Durchmesser geschnitten wird, welcher allen zu n senkrechten Ebenen conjugirt ist, so liegen die Fusspunkte aller durch P gehenden Normalen auf der Raumcurve III. Ordnung, welche die Kegelfläche M und P noch ausser dem Durchmesser $\overline{MP}$ mit einander gemein haben. Beide Kegelflächen gehen aber durch die drei im Satze genannten unendlich fernen Punkte; also auch ihre Schnittcurve.

Mit einer einzelnen Fläche des gegebenen Büschels kann die Raumcurve III. Ordnung höchstens sechs Punkte gemein haben (pag. 132), und im Falle des Paraboloides ist der unendlich ferne Punkt der Hauptaxe einer von diesen sechs Punkten; also:

Aus keinem Punkte P können mehr als sechs Normalen an eine Fläche II. Ordnung gezogen werden; im Fall des Paraboloides ist eine dieser Normalen ein Durchmesser und steht in ihrem unendlich fernen Punkte senkrecht auf dem Paraboloid.

Dieser Satz und die vorhergehenden gelten nicht für Rotations-Flächen II. Ordnung, welche im vorigen Vortrage ausdrücklich ausgeschlossen wurden.

Wir können fast alle noch übrigen Sätze des letzten Vortrages folgendermassen zu einem einzigen Satze über die Normalen an Flächen II. Ordnung zusammenfassen:

„Sind von einem Büschel coaxialer und homothetischer Flächen II. Ordnung die Symmetrie-Ebenen und eine beliebige Normale gegeben, so sind dadurch alle übrigen Normalen völlig bestimmt. Die sämtlichen Normalen, welche von irgend einer Geraden g geschnitten werden, liegen so zu einander, dass alle durch einen beliebigen Punkt P von g hindurchgehenden Normalen eine Kegelfläche II. Ordnung bilden, und alle in einer beliebigen Ebene π von g liegenden Normalen eine Parabel umhüllen. Nur wenn P unendlich fern oder

„auch in einer Symmetrie-Ebene liegt, zerfällt die Kegelfläche
 „II. Ordnung in zwei Strahlenbüschel I. Ordnung; und ebenso
 „erhalten wir in π statt der Parabel-Tangenten zwei Strahlen-
 „büschel I. Ordnung, wenn π eine Durchmesser-Ebene der
 „Flächen ist oder zu einer Symmetrie-Ebene senkrecht steht.
 „Die Fusspunkte aller Normalen, welche von der Geraden g
 „geschnitten werden, erfüllen eine Kegelfläche II. Ordnung
 „oder eine Regelfläche, je nachdem g selbst auf einer Fläche
 „des Büschels senkrecht steht oder nicht; nur wenn g unend-
 „lich fern liegt, erfüllen jene Fusspunkte eine Durchmesser-
 „Ebene, und wenn g in einer Symmetrie-Ebene liegt, so sind
 „jene Fusspunkte theils in dieser, theils in einer zu der Sym-
 „metrie-Ebene senkrechten Ebene enthalten.“

Der letzte Theil des Satzes folgt daraus, dass der geometrische Ort der Fusspunkte mit jeder durch g hindurchgelegten Ebene π eine Gerade gemein hat und mit jedem Axenkegel P , dessen Mittelpunkt auf g liegt, eine Raumcurve III. Ordnung. Die Ausführung des Beweises überlasse ich dem Leser.

Zwanzigster Vortrag.

Fusspunkte der Axen einer Fläche II. Ordnung. Confocale Flächen zweiter Ordnung. Focalpunkte.

Unter den sämtlichen Flächen II. Ordnung, welche denselben Axencomplex besitzen, giebt es Gruppen, die ein noch grösseres Interesse in theoretischer sowohl wie in practischer Beziehung in Anspruch nehmen, als die ähnlichen, concentrisch und ähnlich liegenden Flächen. Wir gelangen zu denselben und zu ihren wichtigsten Eigenschaften durch die folgende Untersuchung. Die Rotationsflächen II. Ordnung sollen auch hier ausgeschlossen bleiben; ebenso wollen wir die Kegelflächen ausschliessen.

Jeder Axe a einer gegebenen Fläche II. Ordnung ist eine einzige zu ihr senkrechte Ebene conjugirt; nur die Hauptaxen der Fläche machen eine Ausnahme, indem sie auf jeder ihnen conjugirten Ebene senkrecht stehen. Der Punkt nun, in welchem

eine Axe a von jener ihr conjugirten Ebene rechtwinklig geschnitten wird, ist besonders bemerkenswerth. Ist z. B. die Axe a eine Normale der Fläche II. Ordnung, so fällt dieser Punkt zusammen mit dem Fusspunkte der Normalen; und wir wollen ihn deshalb auch in jedem anderen Falle den Fusspunkt der Axe a nennen. Wir erhalten ihn auch, indem wir die Polare der Axe a auf eine beliebig durch a gelegte Ebene ε senkrecht projeciren und den Schnittpunkt dieser Projection mit der Axe a aufsuchen; denn die projecirende Ebene steht senkrecht auf a , weil sie ausser der Polare noch andere zu a senkrechte Gerade enthält, die zu der Ebene ε normal sind und die Polare schneiden. Auch die Projection der Polare bildet mit a rechte Winkel.

*Jeder Punkt des Raumes ist der Fusspunkt von drei zu einander rechtwinkligen Axen.**

Dieselben sind die Hauptaxen einer der Fläche II. Ordnung umschriebenen Kegelfläche, oder auch eines polaren Strahlenbündels, welcher dem von der Fläche II. Ordnung bestimmten räumlichen Polarsystem angehört.

„Die Fusspunkte aller Axen, welche auf einer Symmetrie-Ebene senkrecht stehen, liegen in dieser Ebene; jeder Punkt einer Hauptaxe kann als Fusspunkt derselben angesehen werden; der Fusspunkt eines beliebigen Durchmessers liegt unendlich fern.“

Dieses folgt aus der Definition des Fusspunktes einer Axe.

„Die Fusspunkte aller Axen, welche nach einer gegebenen Richtung gezogen werden können und folglich in einer Durchmesser-Ebene δ liegen, sind im Allgemeinen auf einer gleichseitigen Hyperbel enthalten, deren Mittelpunkt mit demjenigen der Fläche II. Ordnung identisch ist, und nur dann auf einer Geraden, wenn die Fläche II. Ordnung ein Paraboloid ist.“

Die Polaren dieser Axen bilden nämlich einen zweiten Parallel-Strahlenbüschel, welcher dem ersteren projectivisch ist, und wir erhalten den Fusspunkt jeder Axe, indem wir sie zum Durchschnitt bringen mit der senkrechten Projection ihrer Polare auf der Durchmesser-Ebene δ . Die Fusspunkte der parallelen Axen stellen sich sonach dar als Erzeugniss von zwei projectivischen und zu einander rechtwinkligen Parallel-Strahlenbüscheln, welche nur im Fall des Paraboloides ihren unendlich fernen Strahl entsprechend gemein haben und perspectivisch liegen, in jedem anderen Falle

* in der Linie
guten. Richtung.
überhaupt nicht
3. Aufeinanderstehen
mündend $\perp$
ger. mündend
hört, so können
das Polarsystem
nur Fl. 2. u. 6.
aufgefallen?

aber eine Curve II. Ordnung mit zwei unendlich fernen Punkten, nämlich die gleichseitige Hyperbel erzeugen.

„Die Fusspunkte aller Axen, welche von einer Symmetrie-Ebene γ in einem gegebenen Punkte P geschnitten werden und also in einer zu γ senkrechten Ebene liegen, sind in einem durch P gehenden Kreise enthalten, dessen Mittelpunkt in γ liegt und dessen Ebene zu γ senkrecht ist.“

Derselbe wird erzeugt durch den Axenbüschel P und durch den zu P projectivischen Strahlenbüschel, auf welchen die Polaren jener Axen sich in der Ebene des Büschels P senkrecht projiciren. Wird eine zweite Symmetrie-Ebene γ_1 von einer beliebigen Axe des Büschels P im Punkte P_1 geschnitten, so liegen die Fusspunkte aller übrigen Axen, welche in P_1 von γ_1 geschnitten werden, in einem zu γ_1 symmetrisch liegenden Kreise; derselbe reducirt sich auf den Punkt P_1 , wenn in P_1 der Fusspunktenkreis des Büschels P von der Symmetrie-Ebene γ_1 geschnitten wird.* Diesen besonderen Fall vorbehalten, können wir sagen:

„Werden zwei Symmetrie-Ebenen γ und γ_1 von irgend einer Axe in den resp. Punkten P und P_1 geschnitten, und sind g und g_1 die Senkrechten, welche aus resp. P und P_1 auf die gemeinschaftliche Hauptaxe von γ und γ_1 gefällt werden können, so ist jede Gerade des Raumes, welche einen Punkt von g mit einem Punkte von g_1 verbindet, eine Axe (pag. 152). Die Fusspunkte aller dieser Axen erfüllen eine durch g und g_1 gehende Fläche, von welcher γ und γ_1 zwei Symmetrie-Ebenen sind, und welche von jeder durch g oder g_1 gelegten Ebene in dieser Geraden und einem Kreise geschnitten wird.*) Diese Fusspunktenfläche ist demnach völlig bestimmt und leicht construierbar, sobald ausser den Geraden g und g_1 noch ein Punkt derselben bekannt ist.“

*) Wird die Fläche auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, in dessen X-Axe die Symmetrie-Ebenen γ und γ_1 sich schneiden, dessen Y-Axe mit g zusammenfällt, und dessen in γ_1 liegende Z-Axe folglich zu g_1 parallel ist, so lautet die Gleichung der Fläche:

$$(x^2 + z^2 - d x) (x - k) + x y^2 = 0.$$

Hierin bezeichnet k den Abstand der Geraden g_1 von der Z-Axe, und d den Durchmesser des Kreises, in welchem die Ebene XZ oder γ_1 der Fläche begegnet. Jede zur X-Axe normale, also zu den Geraden g und g_1 parallele Ebene hat ebenfalls einen Kegelschnitt mit dieser bemerkenswerthen Fläche gemein.

Alle in einer beliebigen Ebene π liegenden Axen bilden einen Strahlenbüschel II. Ordnung und ihre Polaren eine Kegelfläche II. Ordnung; und da ein Strahl der letzteren senkrecht auf π steht, so bilden die Projectionen der Polaren auf der Ebene π einen Strahlenbüschel I. Ordnung, welcher zu dem Büschel II. Ordnung projectivisch ist und mit ihm die Fusspunkte aller in π liegenden Axen erzeugt. Der Mittelpunkt des Büschels I. Ordnung ist der Fusspunkt von zwei jener Axen. Also folgt (I. Abth. pag. 108):

„Die Fusspunkte aller in einer beliebigen Ebene liegenden Axen erfüllen eine Curve III. Ordnung, die einen Doppelpunkt besitzt.“

Die Fusspunkte aller durch einen beliebigen Punkt P gehenden Axen liegen auf einer Raumcurve, welche aus P durch eine Kegelfläche II. Ordnung projecirt wird. Diese Curve muss durch den Punkt P dreimal gehen, weil P von drei zu einander rechtwinkligen Axen der Fusspunkt ist. Jede vierte durch P gehende Axe enthält einen von P verschiedenen Punkt der Curve. Den Beweis, dass diese Curve mit keiner Ebene mehr als fünf Punkte gemein hat, also von der fünften Ordnung ist, muss ich der Kürze wegen unterdrücken.

In einer Symmetrie-Ebene können Punkte vorkommen, welche von allen durch sie hindurchgehenden und die Symmetrie-Ebene schneidenden Axen die Fusspunkte sind, und welche Focalpunkte der Fläche II. Ordnung genannt werden sollen. Wird nämlich eine Axe a in ihrem Fusspunkte F von einer Symmetrie-Ebene γ geschnitten, und zwar unter schiefen Winkeln, so muss sich der Kreis, auf welchem die Fusspunkte aller durch F gehenden und nicht in γ liegenden Axen enthalten sind, auf den Punkt F reduciren, weil er sonst von a in einem von F verschiedenen Fusspunkte geschnitten würde. Jeder Axe des Büschels F ist also eine zu ihr senkrechte und durch F gehende Ebene conjugirt. Dieses lässt sich auch direct beweisen, indem sich ausser a noch zwei Axen des Büschels F (nämlich die zu γ senkrechte und die in γ liegende) angeben lassen, welche von zwei ihnen resp. conjugirten Ebenen rechtwinklig in F geschnitten werden; was aber so von drei Axen gilt, muss für jede Axe des Büschels F gelten, weil dieser zu dem ihm conjugirten Ebenenbüschel projectivisch ist.

Je zwei dieser Axen, welche auf einander senkrecht stehen,

Handwritten note: Wenn man eine Ebene γ durch F zieht, so schneidet sie die Axen des Büschels F in Punkten, die auf einem Kreis liegen, welcher durch F geht.

sind zugleich einander conjugirt, weil jede in einer zu der anderen conjugirten Ebene liegt. Also:

„Jeder Focalpunkt F einer Fläche II. Ordnung ist der Mittelpunkt eines Axenbüschels, in welchem je zwei auf einander senkrechte Strahlen zugleich einander conjugirt sind. Schneidet die Ebene dieses Axenbüschels die Fläche II. Ordnung, so ist demnach der Focalpunkt zugleich ein Brennpunkt der Schnittcurve (I. Abth. pag. 129); kann der Fläche II. Ordnung eine Kegelfläche umschrieben werden, welche den Focalpunkt zum Mittelpunkt hat, so ist diese Kegelfläche eine Rotationsfläche.“

Die Rotations-Axe der Kegelfläche steht senkrecht auf der Ebene des Axenbüschels F . Weil nämlich jede Axe dieses Büschels derjenigen Ebene conjugirt ist, welche im Punkte F auf der Axe senkrecht steht, so ist jede solche Ebene eine Symmetrie-Ebene der Kegelfläche. — Umgekehrt:

„Wenn einer Fläche II. Ordnung ein Rotationskegel umschrieben werden kann, so liegt der Mittelpunkt F desselben in einer Symmetrie-Ebene der Fläche II. Ordnung und ist ein Focalpunkt derselben.“

Denn jede von der Rotationsaxe verschiedene Hauptaxe des Kegels steht in F senkrecht auf einer ihr conjugirten Ebene, und F muss in einer Symmetrie-Ebene liegen, weil alle durch ihn gehenden Axen der Fläche II. Ordnung sich auf Strahlenbüschel vertheilen, und nicht eine Kegelfläche bilden (pag. 151).

Eine Fläche II. Ordnung besitzt unendlich viele Focalpunkte. Da nämlich die Fusspunkte aller nach einer beliebigen Richtung gezogenen Axen im Allgemeinen eine gleichseitige Hyperbel erfüllen, deren Mittelpunkt mit demjenigen der Fläche II. Ordnung zusammenfällt, und da, wie leicht zu erkennen, mindestens eine der drei Symmetrie-Ebenen diese Hyperbel schneiden muss *), so liefert uns jede solche Hyperbel mindestens zwei Focalpunkte.

*) Die drei Symmetrie-Ebenen stehen auf einander senkrecht und ebenso die Asymptoten der Hyperbel. Die eine Asymptote a ist aber von jedem Punkte einer zu ihr senkrechten und durch die andere Asymptote gehenden Ebene getrennt durch die Symmetrie-Ebenen; denn sonst müsste eine der drei durch a und die Hauptaxen h gelegten Ebenen zwei rechte Winkel enthalten, deren Scheitelpunkte zusammenfallen, und von welchen der eine mit dem Schenkel a ganz von dem anderen, welcher h zum Schenkel hat, eingeschlossen wäre, was unmöglich ist.

Denn jeder Schnittpunkt der Hyperbel mit einer Symmetrie-Ebene ist zugleich der Fusspunkt einer durch ihn gehenden Axe und folglich ein Focalpunkt. Bei dem Paraboloid liegen die Fusspunkte paralleler Axen auf einer Geraden, welche mit den beiden Symmetrie-Ebenen je einen Focalpunkt gemein hat.

„Die sämtlichen Focalpunkte einer Fläche II. Ordnung, welche in einer Symmetrie-Ebene γ liegen, bilden eine zu jeder anderen Symmetrie-Ebene symmetrisch liegende Curve, die mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat, und eine Focal-Linie der Fläche II. Ordnung genannt wird.“

Hiebei ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass eine Symmetrie-Ebene γ gar keinen Focalpunkt besitze. Ist aber ein solcher F vorhanden, so enthält im Allgemeinen jede durch F gehende Gerade von γ noch einen zweiten Focalpunkt. Legen wir nämlich durch die Gerade eine beliebige Ebene π , so hat die Curve III. Ordnung, welche die Fusspunkte aller in π gelegenen Axen enthält, im Allgemeinen drei Punkte mit γ gemein; der eine ist der Fusspunkt von $\overline{\pi\gamma}$, die beiden anderen aber, zu welchen F gehört, sind offenbar Focalpunkte, nämlich die Fusspunkte von Axen, welche in ihnen schief von γ geschnitten werden. Steht die Ebene π senkrecht auf einer zweiten Symmetrie-Ebene γ_1 , so zerfällt die Curve III. Ordnung in einen zu γ_1 symmetrischen Kreis und die Gerade $\overline{\pi\gamma_1}$; und jener Kreis schneidet die Symmetrie-Ebene γ in zwei Focalpunkten, welche zu γ_1 symmetrisch liegen und von welchen F der eine ist. — Ich begnüge mich damit, so die Existenz der Focalpunkte und Focallinien auf synthetischem Wege nachgewiesen zu haben, und verfolge hier diesen Gegenstand nicht weiter.

Ist ein Axencomplex gegeben, sowie der Fusspunkt F irgend einer Axe a , die weder auf einer Symmetrie-Ebene senkrecht steht noch eine Hauptaxe schneidet, so ist dadurch der Fusspunkt jeder Axe völlig bestimmt.

Wir construiren zwei Gerade g und g_1 , welche beide von der Axe a geschnitten werden, und von denen jede in einer der Symmetrie-Ebenen γ und γ_1 liegt, zu der anderen dieser Symmetrie-Ebenen dagegen senkrecht ist. Dann ist jede Gerade, welche sowohl von g als auch von g_1 geschnitten wird, eine Axe, und ihr Fusspunkt liegt auf einer durch g , g_1 und den Punkt F gehenden, leicht construirbaren Fläche (pag. 163) und ist durch diese

bestimmt. Jede Durchmesser-Ebene enthält eine dieser Axen, und durch deren Fusspunkt ist die gleichseitige Hyperbel, auf welcher im Allgemeinen die Fusspunkte aller in der Durchmesser-Ebene liegenden Axen enthalten sind, bestimmt, weil die Asymptoten der Hyperbel zu diesen Axen beziehlich parallel und senkrecht sind, und durch den Mittelpunkt des Axencomplexes hindurchgehen. Im Fall ein Mittelpunkt vorhanden ist, können wir auf diese Weise zu jeder Axe den Fusspunkt construiren, indem wir durch die Axe eine Durchmesser-Ebene hindurchlegen. Ist aber kein Mittelpunkt vorhanden, liegen also die Fusspunkte aller auf einer Durchmesser-Ebene enthaltenen Axen in einer Geraden, so müssen wir von dieser noch einen zweiten Punkt construiren. Dazu verhelfen uns die beiden Axen b und c , welche im Punkte F auf der Axe a und auf einander senkrecht stehen, und gleich a für unendlich viele neue Axen uns die Fusspunkte liefern, weil ihr eigener Fusspunkt F bekannt ist. Also auch in diesem Falle ist für jede Axe der Fusspunkt construierbar, und der Satz allgemein bewiesen.

Unter den Flächen II. Ordnung, welchen ein gegebener Axencomplex zukommt, giebt es unendlich viele, für welche alle Axen die nämlichen Fusspunkte erhalten. Wir nennen dieselben confocale Flächen II. Ordnung, weil sie alle ihre Focalpunkte mit einander gemein haben. Jede Axe a steht in ihrem Fusspunkte F zu einer dieser confocalen Flächen normal, und die letztere ist hiedurch und durch die Symmetrie-Ebenen völlig bestimmt (pag. 153).

Von der Schaar confocaler Flächen II. Ordnung, die wir so erhalten, gehen drei Flächen durch jeden Punkt P des Raumes und schneiden einander rechtwinklig in diesem Punkte.

Denn P ist der Fusspunkt von drei zu einander rechtwinkligen Axen, und jede von diesen steht normal zu einer von jenen drei Flächen, während sie die übrigen beiden in P berühren muss. Wir können auch sagen:

Zwei confocale Flächen II. Ordnung schneiden einander in jedem ihrer gemeinschaftlichen Punkte P rechtwinklig.

Die Normalen der Flächen und die Tangenten der Schnittcurve im Punkte P sind die drei zu einander rechtwinkligen Axen, welche P zum Fusspunkt haben. Die Schnittcurve liegt symmetrisch zu jeder Symmetrie-Ebene γ der Flächen und wird von derselben entweder gar nicht oder rechtwinklig geschnitten, weil γ in jedem

Schnittpunkte auf beiden Flächen normal steht. Aus diesem letzteren Grunde sind auch die Symmetrie-Ebenen als Grenzfälle der confocalen Flächen zu betrachten. Beiläufig bemerken wir, dass die Schnittlinie von zwei confocalen Flächen aus dem Pole jeder Symmetrie-Ebene durch eine Cylinderfläche II. Ordnung und aus dem Mittelpunkte durch eine Kegelfläche II. Ordnung projicirt wird (pag. 131); denn diese Punkte sind Hauptpunkte desjenigen Flächenbüschels II. Ordnung, welchem die beiden confocalen Flächen angehören. Wir können desshalb auch den Satz aufstellen:

„Wird die Schnittlinie von zwei confocalen Flächen II. Ordnung auf eine Symmetrie-Ebene der letzteren senkrecht projicirt, so erhält man einen Kegelschnitt, dessen Axen in den übrigen Symmetrie-Ebenen liegen.“

Jeder Axe a ist hinsichtlich sämtlicher confocalen Flächen diejenige Ebene π conjugirt, welche auf der Axe a in deren Fusspunkte F senkrecht steht. Umgekehrt ist jeder Ebene eine zu ihr senkrechte Axe conjugirt; und wir erhalten dieselbe, indem wir aus irgend einem Pole der Ebene auf diese eine Senkrechte fällen. Also:

„Die Polaren einer beliebigen Axe a in Bezug auf eine Schaar confocaler Flächen II. Ordnung liegen in einer zu a senkrechten Ebene π und umhüllen, da sie gleichfalls Axen sind, eine Parabel. Die Pole einer beliebigen Ebene liegen auf einer zu ihr senkrechten Axe, in deren Fusspunkt die Ebene von einer der confocalen Flächen berührt wird.“

Die Ordnungsstrahlen, welche je zwei der confocalen Flächen mit einander erzeugen, sind identisch mit den Axen der Flächen, weil die Polaren jeder Axe sich schneiden; und es ergibt sich (pag. 129):

Die Schaar confocaler Flächen II. Ordnung ist ein besonderer Fall der Flächenschaar II. Ordnung.

Alle für Flächenschaaren II. Ordnung sich ergebenden Sätze gelten also auch für Schaaren confocaler Flächen. So müssen u. A. die Polar-Ebenen eines Punktes hinsichtlich der confocalen Flächen einen Ebenenbüschel III. Ordnung bilden.

Sei g eine beliebige Gerade und seien g_1 und g_2 ihre Polaren in Bezug auf irgend zwei der confocalen Flächen. Jeder durch g gelegten Ebene π entspricht dann in g sowohl wie in g_1 ein Pol, und in der Verbindungslinie a dieser beiden Pole liegen auch die übrigen Pole von π hinsichtlich aller confocalen Flächen.

Dreht sich die Ebene π um g , so beschreibt die ihr conjugirte Axe a eine Regelschaar oder einen Strahlenbüschel II. Ordnung, je nachdem g_1 und g_2 sich nicht schneiden oder sich schneiden; und zwar rückt a einmal ins Unendliche, wenn nämlich π mit einer Durchmesser-Ebene zusammenfällt. Der Ebenenbüschel g ist projectivisch zu dem von a beschriebenen Strahlengebilde und erzeugt mit demselben eine Raumcurve, oder auch eine ebene Curve III. Ordnung. Also:

„In einer Schaar confocaler Flächen II. Ordnung liegen die
 „Pole aller Ebenen, welche durch eine beliebige Gerade g hin-
 „durchgehen, entweder auf einem hyperbolischen Paraboloid,
 „welches auch die Polaren g_1 der Geraden g enthält, oder
 „(wenn g eine Axe ist) auf den Tangenten einer Parabel.
 „Jede Ebene des Büschels g berührt eine der confocalen Flächen;
 „und zwar liegen die Berührungspunkte im ersten Falle auf
 „einer Raumcurve III. Ordnung, im zweiten dagegen auf einer
 „ebenen Curve III. Ordnung.“

Dieser Satz und sein Beweis werden nur dann ungültig, wenn die Gerade g entweder mit einer Hauptaxe in einer Ebene liegt, oder zu einer Symmetrie-Ebene senkrecht steht.

Ist g eine Axe, so steht sie auf der Parabel-Ebene senkrecht und wird nur von zwei Tangenten der Parabel geschnitten; ist g keine Axe, so schneidet sie das hyperbolische Paraboloid entweder in höchstens zwei Punkten, oder sie hat alle ihre Punkte mit demselben gemein und fällt mit einer ihrer Polaren zusammen. Die Gerade g wird also entweder von höchstens zwei der confocalen Flächen berührt, oder sie liegt in einer dieser Flächen, und jede durch g gelegte Ebene wird von der Fläche in einem auf g liegenden Punkte berührt.

Sei wiederum π irgend eine Ebene des Büschels g , und möge der Punkt, in welchem sie von einer der confocalen Flächen berührt wird, ausserhalb der Geraden g liegen. Dann können wir durch g noch eine zweite Berührungs-Ebene π^1 an die Fläche legen. Die Halbirungs-Ebenen μ und ν der von π und π^1 gebildeten Flächenwinkel stehen auf einander senkrecht und sind einander conjugirt in Bezug auf die Fläche II. Ordnung; und diejenige Axe, welche zu der einen μ dieser Halbirungs-Ebenen conjugirt ist und zugleich auf ihr senkrecht steht, muss in der anderen ν liegen, und wird daher in ihrem Fusspunkte von der Geraden g rechtwinklig geschnitten. Also:

„Jede Gerade g , welche auf keiner der confocalen Flächen II. Ordnung enthalten ist, muss von zwei derselben berührt werden. Die Berührungs-Ebenen μ und ν dieser beiden Flächen stehen senkrecht auf einander und halbiren jeden Flächenwinkel $\pi\pi^1$, welcher aus der Geraden g irgend einer dritten unter den confocalen Flächen umschrieben wird.“

Oder der Ebenenbüschel g ist ein involutorischer mit den Ordnungsebenen μ und ν , wenn je zwei Ebenen desselben einander zugeordnet werden, welche eine und dieselbe unter den confocalen Flächen berühren.

„Die Hauptaxen aller concentrischen Kegelflächen, die aus einem beliebigen Punkte P den confocalen Flächen II. Ordnung umschrieben werden können, sind identisch mit denjenigen drei zu einander rechtwinkligen Axen, welche in P ihren Fusspunkt haben (pag. 162); die Verbindungs-Ebenen dieser drei Axen sind also die Symmetrie-Ebenen von allen jenen Kegelflächen. In jedem Strahle des Punktes P schneiden sich zwei der Kegelflächen rechtwinklig, wie aus dem vorigen Satze sich ergibt *). Die Kegelflächen werden deshalb confocal genannt gleich den ihnen eingeschriebenen Flächen II. Ordnung.“

Zu einer anderen Reihe interessanter Sätze führt uns die Bemerkung, dass confocale Flächen II. Ordnung denselben Axencomplex besitzen, und dass die Fusspunkte der Axen für alle jene Flächen die nämlichen sind. Z. B.:

„Die Normalen, welche in einer beliebigen Ebene π an eine Schaar confocaler Flächen II. Ordnung gezogen werden können, umhüllen im Allgemeinen eine Parabel; ihre Fusspunkte liegen auf einer Curve III. Ordnung mit einem Doppelpunkt, und die Berührungs-Ebenen, auf denen sie senkrecht stehen, bilden einen Ebenenbüschel I. Ordnung (pag. 164). Diese Normalen

*) Eine Ausnahme machen nur zwei Strahlen des Punktes P , die sogenannten Focalstrahlen der Kegelflächen. Dieselben gehören einer der confocalen Flächen an. Der Kürze wegen nehmen wir hier an, durch P gehe eine zu den confocalen Flächen gehörige Regelfläche R , auf welcher also jene Focalstrahlen liegen. Sind alsdann π und π^1 die Ebenen, durch welche die Focalstrahlen mit einem beliebigen Strahle g von einer der Kegelflächen verbunden werden, und μ , ν die Ebenen, welche durch g normal und tangential an dieselbe Kegelfläche gelegt werden können, so halbirt μ oder ν den Flächenwinkel $\pi\pi^1$, weil dieser der Regelfläche R umschrieben ist.

„sind zugleich die Axen derjenigen Kegelschnitte, welche die Ebene π mit den confocalen Flächen gemein hat; die Mittelpunkte dieser Kegelschnitte liegen auf der Directrix der Parabel (pag. 154).“

Dieser Satz erleidet eine Ausnahme, wenn π entweder eine Durchmesser-Ebene ist, oder auf einer Symmetrie-Ebene senkrecht steht:

„Steht die Ebene π senkrecht auf einer Symmetrie-Ebene γ , so bilden alle in π enthaltenen Normalen der confocalen Flächen einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt P in der Symmetrie-Ebene γ liegt; und die Fusspunkte dieser Normalen sind auf einem durch P gehenden Kreise enthalten, dessen Mittelpunkt in γ liegt. Die Schnittlinie $\pi\gamma$ ist eine gemeinschaftliche Axe aller Kegelschnitte, welche die Ebene π mit den confocalen Flächen gemein hat.“

„Ist π eine Durchmesser-Ebene, so bilden alle in ihr liegenden Normalen einen Parallel-Strahlenbüschel; und die Fusspunkte dieser Normalen liegen entweder auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren Mittelpunkt mit demjenigen der confocalen Flächen zusammenfällt, oder (falls die confocalen Flächen keinen Mittelpunkt besitzen) auf einer Geraden.“

Wir erhalten hiedurch zugleich Aufschluss über die Lage der Normalen, welche parallel zu einer gegebenen Geraden oder aus einem Punkte P einer Symmetrie-Ebene γ an die confocalen Flächen gezogen werden können.

„Die sämtlichen Normalen, welche aus einem beliebigen Punkte P an die confocalen Flächen II. Ordnung gezogen werden können, liegen im Allgemeinen auf einer Kegelfläche II. Ordnung; ihre Fusspunkte liegen auf einer Raumcurve V. Ordnung, von welcher P ein dreifacher Punkt ist.“

Auf die nämliche Art können alle übrigen, für die Fusspunkte eines Axencomplexes bewiesenen Sätze auf die Normalen einer Schaar confocaler Flächen und deren Fusspunkte übertragen werden. Beispielsweise nenne ich noch den folgenden Satz, welcher aus der Verbindung von zwei vorhergehenden sich ergibt:

„Diejenigen Normalen der confocalen Flächen, welche von einer Symmetrie-Ebene γ in den Punkten eines Durchmessers d geschnitten werden, sind zu einer auf γ senkrechten Ebene ε parallel. Ihre Fusspunkte liegen auf einer durch d gehenden

„Fläche, von welcher γ eine Symmetrie-Ebene ist. Dieselbe
 „wird von jeder zu ε parallelen Ebene in einem Kreise und
 „in einer unendlich fernen Geraden geschnitten, und von jeder
 „durch d gelegten Ebene in diesem Durchmesser und einer
 „gleichseitigen Hyperbel, deren Mittelpunkt mit demjenigen
 „der confocalen Flächen zusammenfällt, und von deren Asymp-
 „toten die eine zu ε parallel ist. Statt dieser Hyperbel er-
 „halten wir nur dann eine eigentliche und eine unendlich
 „ferne Gerade, wenn die confocalen Flächen keinen Mittel-
 „punkt besitzen; in diesem Falle besteht die Fusspunkten-
 „fläche aus einer geradlinigen Fläche II. Ordnung und der
 „unendlich fernen Ebene.“

Einundzwanzigster Vortrag.

Flächen dritter Ordnung, ihre Abbildung auf einer
 Ebene und die in ihnen liegenden zwei Systeme
 von Raumcurven dritter Ordnung.

Wenn im Raume drei beliebige, nicht concentrische Strahlen-
 bündel S , S_1 , S_2 collinear auf einander bezogen werden, so
 schneiden sich je drei einander entsprechende Ebenen derselben
 in einem Punkte und nur ausnahmsweise in einer Geraden. Diese
 Schnittpunkte homologer Ebenen erfüllen eine Fläche F , mit
 deren Untersuchung wir in diesem Vortrage uns beschäftigen
 wollen.

Zunächst bestimmen wir die Ordnung der Fläche F , d. h. die
 Anzahl der Punkte, welche F mit einem geraden Gebilde g ge-
 mein hat. Wenn in einem Punkte P von g zwei homologe Strahlen
 der Bündel S und S_1 sich schneiden, so liegt P auf der Fläche
 F ; denn den Ebenenbüscheln $\overline{SP}$ und $\overline{S_1P}$ entspricht im Bündel
 S_2 ein dritter Ebenenbüschel, von welchem eine Ebene durch
 den Punkt P geht, so dass P als Schnittpunkt von drei homo-
 logen Ebenen der Bündel S , S_1 , S_2 sich darstellt. Wir schliessen
 daraus beiläufig:

„Die Fläche F geht durch die drei Raumcurven III. Ordnung,

„deren Secantensysteme von je zwei der collinearen Strahlenbündel S , S_1 , S_2 erzeugt werden.“

Schneiden sich in g zwei einander entsprechende Ebenen der Bündel S und S_1 , so hat die Gerade g mit einer jener drei Raumcurven höchstens zwei Punkte gemein; und ausserdem wird sie von der entsprechenden Ebene des Bündels S_2 in einem Punkte der Fläche F geschnitten. Tritt der genannte Fall nicht ein, so projeciren wir g aus S durch einen Strahlenbüschel und suchen zu diesem in S_1 den entsprechenden Strahlenbüschel. Der letztere ist projectivisch zu g und erzeugt desshalb mit g im Allgemeinen einen Ebenenbüschel II. Ordnung, dessen sämtliche Ebenen von den entsprechenden des Bündels S in je einem Punkte von g geschnitten werden. Dem Ebenenbüschel II. Ordnung entspricht aber in S_2 ein gleichfalls zu g projectivischer Ebenenbüschel II. Ordnung, und von diesem gehen höchstens drei Ebenen durch die ihnen entsprechenden Punkte von g und mindestens eine Ebene (I. Abth. pag. 107), falls nicht etwa jeder Punkt von g auf der ihm entsprechenden Ebene von S_2 enthalten ist. In jedem solchen Punkte von g schneiden sich aber drei homologe Ebenen der Bündel S , S_1 , S_2 und derselbe liegt demnach auf der Fläche F . Statt der Ebenenbüschel II. Ordnung erhalten wir drei zu g projectivische Ebenenbüschel I. Ordnung, wenn in einem Punkte P von g zwei homologe Strahlen der Bündel S und S_1 sich schneiden. Zwei von diesen Ebenenbüscheln liegen perspectivisch zum geraden Gebilde g , und der dritte, zum Bündel S_2 gehörige liegt entweder ebenfalls perspectivisch zu g , oder es gehen höchstens zwei Ebenen desselben durch die ihnen entsprechenden Punkte von g , so dass auch in diesem Falle die Gerade g höchstens zwei von P verschiedene Punkte mit der Fläche F gemein hat. Aus dem Allen folgt:

Die Fläche F hat mit jeder Geraden g , die nicht ganz auf ihr liegt, höchstens drei Punkte und mindestens einen Punkt gemein. Oder drei collineare, nicht concentrische Strahlenbündel S , S_1 , S_2 erzeugen eine Fläche F III. Ordnung, welcher die sämtlichen Schnittpunkte von je drei homologen Ebenen der Bündel angehören.

Eine Abweichung von diesem Satze tritt nur dann ein, wenn die collinearen Bündel das Secantensystem von einer und derselben Raumcurve III. Ordnung mit einander erzeugen. Dieser Fall wurde bereits im zehnten Vortrage erledigt und soll von jetzt an

ausgeschlossen bleiben. Wir können eine Fläche III. Ordnung durch Bewegung eines Punktes beschreiben auf Grund des Satzes:

„Wenn die vier Flächen eines veränderlichen Tetraeders um vier feste Punkte sich drehen und drei Eckpunkte auf drei durch einen Punkt gehenden, festen Geraden sich bewegen, so beschreibt der vierte Eckpunkt eine Fläche III. Ordnung.“

Denn man erkennt leicht, dass die vier Flächen vier collineare Strahlenbündel um die festen Drehpunkte beschreiben, von denen drei zum vierten perspectivische Lage haben und die Fläche III. Ordnung erzeugen.

Zu vielen wichtigen Eigenschaften der Fläche F III. Ordnung gelangen wir am einfachsten, indem wir die Fläche in folgender Art auf ein ebenes System Σ projectivisch beziehen oder auf die Ebene Σ abbilden. Wir beziehen das System Σ reciprok auf die drei collinearen Strahlenbündel S, S_1, S_2 ; dann entsprechen jedem Punkte von Σ drei homologe Ebenen der Bündel und zugleich deren in F liegender Schnittpunkt. Umgekehrt kann auch zu jedem Punkte P von F der entsprechende Punkt von Σ gefunden werden mittelst derjenigen drei einander entsprechenden Ebenen der Strahlenbündel, welche in P sich schneiden. Jedem geraden Gebilde von Σ entsprechen in S, S_1, S_2 drei projectivische Ebenenbüschel und folglich in F eine Raumcurve III. Ordnung, welche von den Ebenenbüscheln erzeugt wird (pag. 75). Mit einem Worte:

„Die Fläche F III. Ordnung ist auf das ebene System Σ in der Weise bezogen, dass jedem Punkte von F ein Punkt von Σ entspricht, jeder Raumcurve III. Ordnung von F , welche durch drei homologe Ebenenbüschel von S, S_1, S_2 erzeugt wird, ein zu ihr projectivisches gerades Gebilde von Σ , und überhaupt den sämtlichen so erzeugten Raumcurven III. Ordnung von F die sämtlichen Geraden von Σ .“

Wir wollen alle diese auf F liegenden Raumcurven III. Ordnung, welche den Geraden von Σ entsprechen, unter dem Namen „erstes Curvensystem der Fläche III. Ordnung“ zusammenfassen. Wir werden auf der Fläche noch ein zweites System von Raumcurven III. Ordnung kennen lernen, deren Erzeugungsart eine ganz andere ist. Für dieses erste Curvensystem gelten die Sätze:

„Zwei Raumcurven dieses ersten Systemes haben allemal einen Punkt mit einander gemein;“

denn die entsprechenden Geraden von Σ müssen sich schneiden.

„Je zwei Punkte der Fläche III. Ordnung können durch eine „einzige Raumcurve des ersten Systemes mit einander verbunden werden;“

denn durch die entsprechenden beiden Punkte von Σ kann eine Gerade gelegt werden.

Den sämtlichen Geraden von Σ , welche durch einen gegebenen Punkt gehen, entsprechen in F die sämtlichen Curven des ersten Systemes, welche durch den entsprechenden Punkt hindurchgehen; wir wollen dieselben einen Curvenbüschel nennen. Durch jenen Strahlenbüschel des ebenen Systemes Σ werden alle geraden Gebilde von Σ , die nicht den Mittelpunkt des Büschels enthalten, perspectivisch auf einander bezogen; und da jedes derselben zu der ihm entsprechenden Raumcurve III. Ordnung projectivisch ist, so folgt:

„Durch einen Curvenbüschel des ersten Systemes von F werden „alle übrigen Raumcurven dieses Systemes projectivisch auf „einander bezogen.“

Vier Curven des Büschels sollen vier harmonische Raumcurven des ersten Systemes genannt werden, wenn sie von einer und folglich von jeder Curve l des Systemes, die nicht dem Curvenbüschel angehört, in vier harmonischen Punkten geschnitten wird. Jede dieser Curven l erscheint als Schnitt des Curvenbüschels und ist projectivisch auf denselben bezogen. Ebenso ist der Curvenbüschel projectivisch zu dem ihm entsprechenden Strahlenbüschel der Ebene Σ , weil je vier harmonischen Curven des ersteren vier harmonische Gerade des letzteren entsprechen. Ueberhaupt können wir gemäss der allgemeinen Definition der projectivischen Verwandtschaft die Curvenbüschel auf einander und auf beliebige Elementargebilde projectivisch beziehen.

Die Fläche III. Ordnung wird von einer beliebigen Ebene in einer Curve III. Ordnung geschnitten; und jede Raumcurve des ersten Systemes hat mit der Ebene und folglich mit der Schnittcurve mindestens einen Punkt und höchstens drei Punkte gemein; also:

„Jeder ebenen Curve III. Ordnung der Fläche F entspricht „in Σ eine Curve III. Ordnung, welche mit jeder Geraden von „ Σ mindestens einen Punkt und höchstens drei Punkte gemein hat.“

Wir können die Fläche F in der hier angegebenen Weise

projectivisch auf Σ beziehen, indem wir in F irgend vier Punkte annehmen, von denen keine drei auf einer Raumcurve des ersten Systemes enthalten sind, und denselben die Eckpunkte irgend eines in Σ gelegenen Vierecks willkürlich zuweisen. Hierdurch ist nämlich Σ auf die collinearen Strahlenbündel S, S_1, S_2 reciprok bezogen, also auch projectivisch auf F .

Die Fläche III. Ordnung enthält, wie schon erwähnt wurde, noch ein zweites System von Raumcurven III. Ordnung. Wir rechnen zu demselben zunächst die drei Raumcurven, deren Secantensysteme von je zwei der collinearen Strahlenbündel erzeugt werden. Wir wollen mit k_1 und k_2 die beiden durch den Punkt S gehenden Raumcurven III. Ordnung bezeichnen, welche der Bündel S mit den resp. Bündeln S_1 und S_2 erzeugt. Durch die Curve k_1 ist die collineare Verwandtschaft der Bündel S und S_1 völlig bestimmt, weil jede Secante von k_1 durch zwei homologe Ebenen von S und S_1 projicirt wird. Andererseits ist mittelst der Bündel S und S_1 das Secantensystem von k_1 projectivisch auf den Strahlenbündel S_2 bezogen, so dass jede Secante von k_1 einer Ebene von S_2 entspricht und von derselben in einem Punkte der Fläche F III. Ordnung geschnitten wird. Die Fläche F wird also auch erzeugt durch das Secantensystem der Raumcurve k_1 III. Ordnung und den zu ihm projectivischen Strahlenbündel S_2 . Weil nun das Secantensystem aus jedem Punkte seiner Ordnungcurve k_1 durch einen zu S, S_1 und folglich auch zu S_2 collinearen Strahlenbündel projicirt wird, so können wir den Mittelpunkt des Bündels S mit jedem anderen Punkte von k_1 vertauschen. Die Raumcurve k_2 III. Ordnung, welche von den Bündeln S und S_2 erzeugt wird, ändert dann ihre Lage auf der Fläche F . Ich behaupte nun:

„Wenn der Punkt S die Raumcurve k_1 durchläuft, so beschreibt die von den Bündeln S und S_2 erzeugte Raumcurve k_2 des zweiten Systemes die ganze Fläche III. Ordnung, indem sie jeden Punkt P derselben einmal überstreicht.“

Wir müssen zeigen, dass für eine bestimmte Lage des Punktes S die Curve k_2 durch den Punkt P geht. In P schneiden sich drei homologe Ebenen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ der collinearen Bündel S, S_1, S_2 ; dem Strahle $\overline{S_2 P}$ oder b_2 von S_2 entspricht desshalb in S_1 ein Strahl b_1 , welcher mit der durch P gehenden Secante $\alpha\alpha_1$ der Raumcurve k_1 in einer Ebene α_1 liegt. Dem Ebenenbüschel b_2 von S_2 entspricht ferner in dem Secantensystem von k_1 eine Regelschaar oder Kegelfläche II. Ordnung, deren sämtliche Strahlen

von b_1 geschnitten werden und zu welcher auch $\overline{a a_1}$ gehört. Sei b derjenige Leitstrahl der Regelschaar resp. Strahl der Kegelfläche II. Ordnung, welcher durch den Punkt P hindurchgeht. Derselbe schneidet (pag. 72) die Raumcurve k_1 in einem Punkte, welcher im Falle der Kegelfläche II. Ordnung vom Mittelpunkte derselben verschieden ist. Wählen wir diesen Schnittpunkt von b und k_1 zum Mittelpunkte des Bündels S , so erzeugt S mit S_2 jene durch P gehende Raumcurve k_2 III. Ordnung. Denn dem Ebenenbüschel b_2 von S_2 entspricht im Bündel S derjenige Ebenenbüschel, durch welchen die Regelschaar oder Kegelfläche II. Ordnung aus S , oder, was dasselbe ist, aus der Geraden b projecirt wird; die Geraden b_2 und b entsprechen demnach einander, so dass ihr Schnittpunkt P wirklich auf k_2 liegt.

Den Mittelpunkt des Strahlenbündels S_2 können wir mit einem beliebigen anderen Punkt der Curve k_3 , z. B. mit P vertauschen; wir können ihn also nach einem ganz beliebigen Punkte der Fläche F III. Ordnung verlegen. Oder:

Jeder Punkt der Fläche III. Ordnung kann zum Mittelpunkte von einem der drei collinearen Strahlenbündel gemacht werden, durch welche die Fläche erzeugt wird.

Hieraus ergibt sich namentlich, dass die ursprünglich angenommenen drei Mittelpunkte keine ausgezeichneten Punkte der Fläche sind, dass vielmehr alle für sie bewiesenen Sätze auch von jedem anderen Punkte der Fläche gelten. Weil z. B. die Mittelpunkte der Bündel S und S_1 durch eine Raumcurve k_1 III. Ordnung verbunden sind, die dem zweiten Curvensystem der Fläche F angehört, so folgt:

„Je zwei Punkte der Fläche F III. Ordnung können durch „eine Raumcurve des zweiten Curvensystemes von F mit einander verbunden werden.“

Die von S und S_1 erzeugte Raumcurve k_1 kann als eine ganz beliebige Curve des zweiten Systemes betrachtet werden. Aus dieser Bemerkung lässt sich schliessen:

Jede Raumcurve l des ersten Curvensystemes liegt mit jeder Curve k_1 des zweiten Systemes auf einer Regelfläche oder Kegelfläche II. Ordnung; und zwar besteht im Falle der Regelfläche die eine Regelschaar aus Secanten der einen, die andere aber aus Secanten der anderen Raumcurve III. Ordnung.

Nämlich die Raumcurve l wird erzeugt durch drei einander entsprechende Ebenenbüschel a, a_1, a_2 der Bündel S, S_1, S_2 ;

sie liegt desshalb mit k_1 auf derjenigen Fläche II. Ordnung, welche zugleich alle von den Ebenenbüscheln a und a_1 erzeugten Secanten von k_1 enthält. Auf derselben Fläche II. Ordnung liegen auch die Axen der beiden Ebenenbüschel, und diese Axen sind Secanten von l (pag. 75).

Umgekehrt wird jede geradlinige Fläche II. Ordnung, welche durch eine Raumcurve c des einen Systemes gelegt werden kann, von der Fläche III. Ordnung ausserdem in einer Raumcurve c_1 des anderen Systemes geschnitten.

Weil nämlich jede Gerade der Fläche II. Ordnung mit der Raumcurve c höchstens zwei, mit der Fläche F III. Ordnung aber im Allgemeinen drei Punkte gemein hat, so giebt es noch ausserhalb der Curve c Punkte, welche sowohl auf F als auch auf der Fläche II. Ordnung liegen. Seien P und Q irgend zwei derselben, und c_1 diejenige durch P und Q gehende Raumcurve III. Ordnung, welche zu einem der beiden Curvensysteme, nicht aber zu demselben wie c gehört. Dann kann durch c und c_1 eine geradlinige Fläche II. Ordnung gelegt werden, welche mit der vorhin angenommenen die Raumcurve c und die beiden durch P und Q gehenden Secanten von c gemein hat und desshalb mit derselben zusammenfallen muss.

Durch jeden Punkt S der Fläche III. Ordnung geht ein Büschel von Raumcurven des zweiten Systemes, und die Curven k_1 und k_2 , durch welche die collineare Verwandtschaft der Bündel S , S_1 und S_2 gegeben ist, können als zwei ganz beliebige Curven dieses Büschels betrachtet werden. Jede Ebene von S projicirt je eine ihr entsprechende Secante von k_1 und k_2 ; sie hat diese beiden Secanten, welche in einem Punkte der Fläche F sich schneiden, mit den beiden ihr entsprechenden Ebenen von S_1 und S_2 gemein. Daraus ergiebt sich folgende höchst einfache Construction der Fläche III. Ordnung mittelst der Raumcurven k_1 und k_2 des zweiten Systemes:

„Durch den gemeinschaftlichen Punkt S der Curven k_1 und k_2 legen wir Ebenen, und bestimmen in jeder dieser Ebenen „diejenigen beiden Secanten von k_1 und k_2 , welche nicht durch „ S gehen; dann schneiden sich die beiden Secanten in einem „Punkte der Fläche III. Ordnung.“

Geben wir z. B. der durch S gehenden Ebene eine solche Lage, dass sie von k_1 und k_2 in je zwei von S verschiedenen Punkten geschnitten wird, so fallen die beiden Secanten zusammen mit

den beiden Verbindungslinien dieser Punktenpaare, sind also äusserst leicht zu construiren. Nur dann, wenn eine Ebene im Punkte S die Curve k_1 oder k_2 berührt, geht die ihr entsprechende Secante durch den Punkt S hindurch.

Wir können mittelst dieser Construction zu jedem beliebigen Punkte P der Fläche III. Ordnung gelangen. Da nun k_1 und k_2 zwei ganz beliebige durch S gehende Raumcurven des zweiten Curvensystemes sind, so folgt:

„Werden an die sämtlichen Raumcurven III. Ordnung, welche dem zweiten Curvensystem angehören und durch einen beliebigen Punkt S gehen, aus irgend einem zweiten Punkte P der Fläche III. Ordnung Secanten gezogen, so liegen alle diese Secanten in einer durch $\overline{SP}$ gehenden Ebene α .“

Diese Ebene α wird von den ihr entsprechenden Ebenen α_1 und α_2 der Bündel S_1 und S_2 im Punkte P geschnitten; und jede durch P gehende Raumcurve des ersten Systemes wird erzeugt durch drei Ebenenbüschel von S , S_1 und S_2 , deren Axen in resp. α , α_1 und α_2 liegen. Diese Axen sind aber zugleich Secanten jener durch P gehenden Raumcurve III. Ordnung, so dass der Satz gilt:

„Werden an die sämtlichen Raumcurven III. Ordnung, welche dem ersten Curvensystem angehören und durch den beliebigen Punkt P gehen, aus dem Punkte S der Fläche III. Ordnung Secanten gezogen, so liegen alle diese Secanten in derselben durch $\overline{SP}$ gehenden Ebene α , welche im vorigen Satze genannt wurde.“

Da der Punkt S beliebig auf der Fläche III. Ordnung gewählt werden kann, so wird durch die letzten zwei Sätze eine gemeinschaftliche Eigenschaft der beiden Curvensysteme ausgesagt. Auf Grund des letzten Satzes können wir mit Hülfe von zwei Raumcurven l_1 , l_2 des ersten Systemes die Fläche III. Ordnung ganz ebenso construiren, wie vorhin mittelst der Curven k_1 und k_2 des zweiten Systemes. Aus dieser Construction aber lässt sich ohne Weiteres eine collineare Verwandtschaft zwischen drei Strahlenbündeln P , P_1 , P_2 ableiten, sodass P mit P_1 und P_2 die Secantensysteme von resp. l_1 und l_2 , also von zwei Curven des ersten Systemes erzeugt, und dass je drei einander entsprechende Ebenenbüschel von P , P_1 und P_2 eine Raumcurve des zweiten Systemes erzeugen. Die Fläche III. Ordnung wird alsdann durch die collinearen Bündel P , P_1 , P_2 erzeugt, aber die beiden Curven-

systeme haben hinsichtlich ihrer Entstehungsart und ihrer gegenseitigen Beziehungen die Rollen ausgetauscht; woraus folgt:

Alle Eigenschaften des einen Systemes von Raumcurven III. Ordnung kommen auch dem anderen zu.

So z. B. müssen je zwei Curven des zweiten Systemes einen Punkt mit einander gemein haben, weil dasselbe von je zwei Curven des ersten Systemes gilt. Durch einen Curvenbüschel des zweiten Systemes werden alle übrigen Curven dieses Systemes projectivisch geschnitten. Die Fläche III. Ordnung kann auf einer Ebene auch so abgebildet werden, dass jeder Curve des zweiten Systemes eine Gerade entspricht und jedem Curvenbüschel des zweiten Systemes ein ihm projectivischer Strahlenbüschel; die Curven des ersten Systemes werden alsdann durch ebene Curven V. Ordnung abgebildet, weil sie mit den Raumcurven des zweiten Systemes höchstens je fünf Punkte gemein haben können. Die Sätze, welche wir jetzt für Curvenbüschel des ersten Systemes beweisen wollen, gelten auch für Curvenbüschel des zweiten Systemes.

„Wird jeder Raumcurve III. Ordnung, welche einem Curvenbüschel P des ersten Systemes angehört, die Axe desjenigen Ebenenbüschels von S zugewiesen, welcher mit den entsprechenden Ebenenbüscheln der Bündel S_1 und S_2 die Curve erzeugt, also mit anderen Worten diejenige Secante, welche aus dem Punkte S an die Raumcurve gezogen werden kann, so ist der Strahlenbüschel S , welchen diese Axen oder Secanten bilden, projectivisch auf den Curvenbüschel P bezogen.“

Denn sei l eine beliebige Raumcurve III. Ordnung, welche dem ersten Curvensystem nicht aber dem Curvenbüschel P angehört. Dieselbe ist projectivisch auf den Curvenbüschel bezogen, wenn jedem Punkte von l die durch ihn gehende Curve des Büschels zugewiesen wird (pag. 175). Zugleich aber liegt derjenige Ebenenbüschel von S , welcher mit den entsprechenden Ebenenbüscheln von S_1 und S_2 die Raumcurve l erzeugt, perspectivisch sowohl zu l als auch zu dem im Satze genannten Secantenbüschel S , und l ist also auch zu letzterem projectivisch. Der Curvenbüschel P und der Secantenbüschel S sind demnach beide zu der Raumcurve l und also auch zu einander projectivisch.

Der Satz gilt auch in dem Falle, wenn der Mittelpunkt des Curvenbüschels mit dem Punkte S zusammenfällt. Der Secantenbüschel liegt alsdann in derjenigen Ebene σ von S , welche die

** 7. Secanten für
in dem Falle
findet sich die
S. gefundenen Geraden*

Tangenten der durch S gehenden Raumcurven k_1 und k_2 des zweiten Systemes mit einander verbindet. Denn diese Ebene σ wird von den entsprechenden Ebenen σ_1 und σ_2 der Bündel S_1 und S_2 im Punkte S geschnitten, weil z. B. der Tangente von k_1 am Punkte S der Strahl $\overline{S_1 S}$ des Bündels S_1 entspricht und weil durch $\overline{S_1 S}$ die Ebene σ_1 hindurchgehen muss. Sei nun l_1 eine beliebige Curve des zum ersten System gehörigen Curvenbüschels S , und a die ihr entsprechende in σ liegende Secante; dann hat eine beliebig durch a gelegte Ebene noch einen ausserhalb a liegenden Punkt mit der Raumcurve l_1 gemein, welcher sich aber dem Punkte S unbegrenzt nähert, wenn jene Ebene der Ebene σ näher und immer näher kommt. Folglich enthält σ auch die Tangente von l_1 im Punkte S ; oder:

„Werden in einem beliebigen Punkte S der Fläche III. Ordnung an alle durch S gehenden Raumcurven des ersten und des zweiten Systemes Tangenten gezogen, so liegen alle diese Tangenten in einer Ebene σ , der sogenannten Berührungsebene des Punktes S .“

Zu beachten ist noch, dass die Raumcurve l_1 im Allgemeinen von σ berührt und ausserdem in einem von S verschiedenen Punkte L geschnitten wird, und dass ihre Secante a die Punkte S und L mit einander verbindet, also eine eigentliche Secante von l_1 ist. Nur dann fällt a mit der Tangente von l_1 zusammen, wenn σ sich der Curve l_1 im Punkte S anschmiegt.

Wir wollen bei dieser Gelegenheit gewisser ausgezeichneten Punkte Erwähnung thun, die in besonderen Fällen sich auf der Fläche III. Ordnung finden können, und für welche die bisherigen Sätze nicht gelten. Es kann nämlich der Fall eintreten, dass die Raumcurven k_1 und k_2 III. Ordnung, welche der Strahlenbündel S mit den ihm collinearen Bündeln S_1 und S_2 erzeugt, noch ausser dem Punkte S einzelne Punkte, nämlich höchstens vier, mit einander gemein haben, oder auch, dass sie sich in S berühren. In jedem dieser von S verschiedenen gemeinschaftlichen Punkte, und eventuell auch in S schneiden sich alsdann drei homologe Strahlen der Bündel, und daraus folgt, dass ein solcher Punkt auf jeder Raumcurve III. Ordnung sowohl des ersten als auch des zweiten Curvensystemes liegen muss. Nach einem solchen ausgezeichneten Punkte können die Mittelpunkte von zwei der collinearen Bündel S , S_1 , S_2 verlegt werden; so dass die Fläche erzeugt werden kann durch drei collineare Strahlenbündel, von

denen zwei concentrisch liegen. Wir wollen auf diese besonderen Fälle nicht näher eingehen, sondern annehmen, dass die Raumcurven k_1 und k_2 , die wir als zwei ganz beliebige Curven des zweiten Systemes ansehen dürfen, nur einen einzigen Punkt S mit einander gemein haben und sich in demselben schneiden. Auch zwei beliebige Raumcurven des ersten Systemes haben alsdann nur einen Punkt mit einander gemein und schneiden sich in demselben.

Wird jede Raumcurve l des ersten Curvensystemes mit einer beliebig gegebenen Curve k des zweiten Systemes durch eine Fläche II. Ordnung verbunden, so erhalten wir einen Bündel von Flächen II. Ordnung, die sich alle in k schneiden. Jeder Curve des ersten Systemes entspricht eine durch sie hindurchgehende Fläche des Bündels k ; jedem Curvenbüschel P aber entspricht ein Flächenbüschel II. Ordnung, dessen sämtliche Flächen die Raumcurve k und eine durch den Punkt P gehende Secante von k mit einander gemein haben. — Sei der Mittelpunkt des Strahlenbündels S ausserhalb der Raumcurve k gelegen; jedem Strahle a von S entspricht dann eine bestimmte Curve l des ersten Systemes, welche der Ebenenbüschel a mit den homologen Ebenenbüscheln der Bündel S_1 und S_2 erzeugt, und zwar ist a eine Secante dieser Raumcurve l . Dem Strahle a ist sonach auch eine Fläche kl des Flächenbündels k II. Ordnung zugewiesen, und zugleich eine bestimmte Ebene α , welche vom Punkte S die Polar-Ebene ist hinsichtlich der Fläche kl II. Ordnung. Die Ebene α geht durch den Punkt S^1 , welcher dem Punkte S conjugirt ist hinsichtlich der Raumcurve k ; sie wird ausserdem vom Strahle a in einem Punkte geschnitten, welcher zu S conjugirt ist hinsichtlich der Raumcurve l (pag. 90).

Dreht sich der Strahl a um den Punkt S , so ändert die Curve l ihre Lage auf der Fläche III. Ordnung und ebenso die Fläche kl II. Ordnung im Bündel k ; und zugleich muss die Polar-Ebene α von S um den Punkt S^1 sich drehen. Beschreibt nun a einen gewöhnlichen Strahlenbüschel, so beschreibt l einen zu ihm projectivischen Curvenbüschel; demnach muss die Fläche kl II. Ordnung einen Flächenbüschel beschreiben, und die Ebene α einen zu diesem Flächenbüschel projectivischen Ebenenbüschel I. Ordnung. Also jedem Strahle von S entspricht eine Ebene des Strahlenbündels S^1 und jedem Strahlenbüschel I. Ordnung von S und dessen Ebene entspricht in S^1 ein Ebenenbüschel I. Ordnung und dessen Axe. Daraus folgt, dass die Bündel S und S^1 reciprok

auf einander bezogen sind, also eine Fläche II. Ordnung erzeugen; oder:

Wird aus einem beliebigen Punkte S der Fläche III. Ordnung an jede Raumcurve l des ersten Systemes eine Secante a gezogen und auf a derjenige Punkt bestimmt, welcher zu S conjugirt ist hinsichtlich der Curve l , so erfüllen alle so gefundenen Punkte eine durch S gehende Fläche II. Ordnung. Dieselbe enthält auch alle Punkte S^1 , welche zu S conjugirt sind hinsichtlich der Raumcurven k des zweiten Systemes.

Wenn irgend ein Strahl des Bündels S die Fläche III. Ordnung in zwei von S verschiedenen Punkten A, A_1 schneidet, also von der durch A und A_1 gehenden Curve des ersten Systemes eine Secante ist, so ist der zu S conjugirte Punkt dieser Secante durch A und A_1 harmonisch getrennt von S . Drehen wir den Strahl $\overline{SA A_1}$ so, dass die Punkte A und A_1 einander unbegrenzt sich nähern und $\overline{SA A_1}$ in eine Tangente der Fläche III. Ordnung übergeht, so muss mit dem Berührungspunkt auch der zu S conjugirte Punkt sich vereinigen, eben weil er von S harmonisch getrennt ist durch A und A_1 . Ebenso ergibt sich, dass der zu S conjugirte Punkt mit S sich vereinigt, wenn einer der Punkte A und A_1 mit S zusammenfällt, wenn also der Strahl $\overline{SA A_1}$ einer in S an die Fläche III. Ordnung gezogenen Tangente unbegrenzt sich nähert. Also:

Die genannte Fläche II. Ordnung enthält jeden Punkt, welcher vom Punkte S durch zwei andere Punkte A, A_1 der Fläche F III. Ordnung harmonisch getrennt ist, sowie die Berührungspunkte aller Tangenten, welche von S an die Fläche F gezogen werden können. Sie hat ausserdem mit F die Berührungs-Ebene im Punkte S gemein, und kann die Polare des Punktes S genannt werden.

Weil jedem Curvenbüschel des ersten Systemes ein ihm projectivischer Strahlenbüschel von S entspricht, so können wir sagen, das erste Curvensystem sei projectivisch auf den Strahlenbündel S bezogen. Der Bündel S ist aber reciprok auf den Bündel S^1 bezogen, und anderseits entsprechen je vier harmonischen Ebenen von S^1 stets vier harmonische Flächen des Flächenbündels k , so dass der letztere ebenfalls zum Strahlenbündel S^1 projectivisch ist. Wir schliessen hieraus:

„Wird jeder Curve des ersten Systemes die durch sie hindurchgehende Fläche des Bündels k II. Ordnung zugewiesen, so ist „das Curvensystem projectivisch auf den Flächenbündel k be-

„zogen; namentlich entspricht jedem Curvenbüschel des Systemes „ein zu ihm projectivischer Flächenbüschel II. Ordnung von k .“

Mit Hülfe dieses Satzes kann die gegenseitige Lage derjenigen Punkte leicht angegeben werden, welche von einem ausserhalb der Fläche F III. Ordnung gegebenen Punkte P durch je zwei Punkte der Fläche harmonisch getrennt sind, oder allgemeiner zu reden, welche zu P conjugirt sind in Bezug auf je eine Curve l des ersten Systemes. Verbinden wir l mit irgend drei Curven k, k_1, k_2 des zweiten Systemes durch Flächen II. Ordnung, so schneiden sich die drei Polar-Ebenen des Punktes P hinsichtlich dieser Flächen II. Ordnung in demjenigen Punkte, welcher zu P conjugirt ist in Bezug auf l . Wenn nun l das ganze erste Curvensystem beschreibt, so beschreiben die Flächen kl, k_1l und k_2l drei Flächenbündel k, k_1 und k_2 , welche zum Curvensystem und folglich auch zu einander projectivisch sind, und die drei Polar-Ebenen des Punktes P beschreiben drei Strahlenbündel P^1, P_1^1, P_2^1 , welche zu den Flächenbündeln und dem Curvensystem projectivisch und sonach zu einander collinear sind, und deren Mittelpunkte zu P conjugirt sind hinsichtlich der Raumcurven k, k_1, k_2 . Die collinearen Bündel P^1, P_1^1, P_2^1 erzeugen aber eine Fläche III. Ordnung; oder:

„Die sämtlichen Punkte, welche durch je zwei Punkte der „Fläche F III. Ordnung von einem ausserhalb F gelegenen „Punkte P harmonisch getrennt sind, liegen auf einer zweiten „Fläche III. Ordnung. Die letztere geht auch durch die Berührungspunkte aller Tangenten, welche von P an die Fläche „ F gezogen werden können, und wird ebenfalls von diesen Tangenten berührt.“

Jede durch P gelegte Gerade, welche mit F drei Punkte A, A_1, A_2 gemein hat, wird offenbar auch von jener zweiten Fläche III. Ordnung in drei Punkten B, B_1, B_2 geschnitten. Wird nun der Strahl $\overline{PA}$ so um P gedreht, dass er in eine Tangente der Fläche F übergeht, dass also zwei der Punkte A, A_1, A_2 im Berührungspunkte sich vereinigen, so fällt mit ihnen auch einer der Punkte B, B_1, B_2 zusammen, während gleichzeitig die beiden übrigen sich vereinigen; denn jeder der Punkte B, B_1, B_2 ist von P durch zwei der Punkte A, A_1, A_2 harmonisch getrennt. Daraus folgt der Schluss unseres Satzes.

Zweiundzwanzigster Vortrag.

Ebene Curven dritter Ordnung.

Zu fernerem wichtigen Eigenschaften der Fläche F III. Ordnung führt uns die Untersuchung der auf F gelegenen ebenen Curven. Von einer beliebigen Ebene Σ wird die Fläche in einer Curve C_3 III. Ordnung geschnitten, welche nämlich mit jeder, ausserhalb F liegenden Geraden der Ebene höchstens drei Punkte und mindestens einen Punkt gemein hat. Die Fläche F wird erzeugt durch drei collineare Strahlenbündel S, S_1, S_2 ; die Curve C_3 erscheint desshalb als ein Erzeugniss von drei in Σ liegenden collinearen Systemen, welche von jenen Strahlenbündeln Schnitte sind, und kann unabhängig von der Fläche III. Ordnung wie folgt definiert werden:

„Drei collineare ebene Systeme, welche in derselben Ebene Σ liegen, erzeugen eine Curve C_3 III. Ordnung, in deren Punkten je drei homologe Strahlen der Systeme sich schneiden. Durch keinen ausserhalb C_3 gelegenen Punkt gehen mehr als zwei einander entsprechende Strahlen der Systeme.“

Projiciren wir die drei collinearen Systeme aus irgend drei Punkten des Raumes durch Strahlenbündel, so erzeugen diese eine durch C_3 gehende Fläche III. Ordnung. Dieselbe artet aus in eine Kegelfläche III. Ordnung, wenn die Mittelpunkte der drei Strahlenbündel zusammenfallen.

Die Fläche F III. Ordnung, als deren Schnitt wir die ebene Curve C_3 betrachten, kann mit Hülfe der collinearen Bündel S, S_1, S_2 auf ein ebenes System Σ' abgebildet werden; wir brauchen, wie wir gesehen haben, nur die Bündel reciprok auf Σ' zu beziehen. Als Abbildung von C_3 erhalten wir dann eine Curve C'_3 , die ebenfalls von der III. Ordnung ist. Nämlich die ebenen Systeme Σ und Σ' sind mittelst der Bündel S, S_1, S_2 in dreifacher Weise reciprok auf einander bezogen; und jeder Punkt P' von C'_3 unterscheidet sich dadurch von den übrigen Punkten des Systemes Σ' , dass die drei ihm entsprechenden Strahlen von Σ nicht ein Dreieck bilden, sondern durch einen und denselben Punkt P von C_3 gehen. Umgekehrt entsprechen dem Punkte P von C_3 drei Strahlen in Σ' , welche in einem einzigen Punkte P' von C'_3 sich

schneiden; sodass auch C_3 durch drei in Σ' liegende collineare Systeme erzeugt wird. Schon früher (pag. 175) haben wir auf ganz anderem Wege bewiesen, dass C_3 mit jeder in Σ' gelegenen Geraden mindestens einen Punkt und höchstens drei Punkte gemein hat. — Da Σ' reciprok auf die Strahlenbündel S, S_1, S_2 bezogen ist, so entsprechen der Curve C_3 III. Ordnung drei Ebenenbüschel III. Ordnung; oder:

„Jede ebene Schnittcurve C_3 der Fläche F III. Ordnung wird „durch drei homologe Ebenenbüschel III. Ordnung von S, S_1, S_2 „erzeugt.“

Eine wichtige Eigenschaft der Curve C_3 folgt aus früheren Sätzen (pag. 183), nämlich:

„Ist S ein beliebiger Punkt der ebenen Curve C_3 III. Ordnung, so liegen die sämtlichen Punkte, welche von S durch „je zwei andere Curvenpunkte harmonisch getrennt sind, auf „einem durch S gehenden Kegelschnitt. Derselbe berührt in „ S die Curve C_3 und enthält die Berührungspunkte aller Tangenten, welche aus dem Punkte S an C_3 gezogen werden „können. In speciellen Fällen artet der Kegelschnitt in zwei „Gerade aus.“

Der Kegelschnitt muss z. B. immer dann aus zwei Geraden bestehen, wenn C_3 in drei Gerade a, b, c zerfällt. Dass dieses möglich ist, leuchtet sofort ein; denn wir können drei ebene Systeme collinear so auf einander beziehen, dass sie ein Dreieit $a b c$ entsprechend gemein haben. Wenn C_3 eine Curve II. Ordnung α enthält und S ausserhalb oder innerhalb α liegt, so zerfällt der im Satze genannte Kegelschnitt ebenfalls in zwei Gerade, von denen eine mit der Polare von S in Bezug auf α identisch ist. Die andere Gerade geht durch S ; sie muss ganz der Linie C_3 angehören, weil sonst unmöglich jeder ihrer Punkte durch zwei Punkte der Linie C_3 harmonisch von S getrennt sein würde. Daraus folgt:

„Wenn die Curve C_3 III. Ordnung einen Kegelschnitt α enthält, so zerfällt sie in diesen und in eine Gerade.“

Wir wollen die Mittelpunkte der drei Bündel S, S_1, S_2 durch einen Kegelschnitt κ mit einander verbinden, und beweisen, dass κ entweder ganz auf der Fläche F III. Ordnung enthalten ist, oder noch höchstens drei andere Punkte mit F gemein hat. Wir projeciren den Kegelschnitt κ aus S durch einen Strahlenbüschel und suchen zu diesem im Bündel S_1 den entsprechenden Strahlen-

büschel; dann ist der letztere ebenfalls projectivisch zu α und erzeugt mit α einen Ebenenbüschel I. oder II. Ordnung. Jede Ebene desselben hat mit der entsprechenden Ebene von S einen Punkt von α gemein; dem Ebenenbüschel entspricht aber auch in S_2 ein zu α projectivischer Ebenenbüschel, von welchem entweder alle oder höchstens drei Ebenen durch die entsprechenden Punkte von α hindurchgehen (I. Abthl. pag. 108). Damit ist die Behauptung bewiesen; und weil S, S_1, S_2 als drei ganz beliebige Punkte der Fläche F zu betrachten sind, so ergibt sich:

„Die Fläche F III. Ordnung und jede ebene Schnittcurve derselben hat mit keinem Kegelschnitt, der nicht ganz ihr angehört, mehr als sechs Punkte gemein.“

Wenn also eine ebene Curve C_3 III. Ordnung mit irgend einem Kegelschnitt α mehr als sechs Punkte gemein hat, so zerfällt sie in diesen Kegelschnitt und in eine Gerade. Eine andere Anwendung des Satzes führt zu dem folgenden:

„Eine Fläche II. Ordnung hat mit der Fläche III. Ordnung im Allgemeinen eine Raumcurve sechster Ordnung gemein.“

Denn eine beliebige Ebene schneidet die Fläche II. Ordnung in einem Kegelschnitt, welcher im Allgemeinen höchstens sechs (auf jener Raumcurve liegende) Punkte mit der Fläche III. Ordnung gemein hat.

„Drei projectivische, nicht concentrische Ebenenbüschel II. Ordnung erzeugen im Allgemeinen eine Raumcurve γ VI. Ordnung, durch welche eine Fläche III. Ordnung gelegt werden kann.“

Nämlich die drei Strahlenbündel S, S_1, S_2 , welchen die Ebenenbüschel II. Ordnung angehören, sind durch diese collinear auf einander bezogen und erzeugen eine Fläche F III. Ordnung. Bilden wir F auf eine Ebene Σ' ab, so entspricht den Ebenenbüscheln II. Ordnung und der von ihnen erzeugten Curve γ ein Kegelschnitt γ' in Σ' , und jeder ebenen Schnittcurve C_3 von F entspricht eine Curve C'_3 III. Ordnung in Σ' . Und weil γ' mit C'_3 höchstens sechs Punkte gemein hat, so wird auch γ von der Curve C_3 und von deren Ebene in höchstens sechs Punkten geschnitten. Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn γ' einen Theil der Curve C'_3 bildet.

Wenn ein Kegelschnitt sechs Punkte mit einer Curve C_3 III. Ordnung gemein hat und alsdann seine Gestalt und Lage in der Weise stetig ändert, dass zwei dieser sechs Punkte einander unbegrenzt sich nähern, so vereinigen sich schliesslich diese beiden

Punkte zu einem gemeinschaftlichen Berührungspunkte, ausser welchem die beiden Curven nur noch vier Punkte mit einander gemein haben. Nun liegen aber die Berührungspunkte derjenigen Tangenten, welche von einem Punkte S der Curve C_3 an diese gezogen werden können, auf einem Kegelschnitt, welcher in S die Curve C_3 berührt; also:

„Durch einen beliebigen Punkt S der Curve C_3 III. Ordnung können ausser der Tangente in S selbst noch höchstens vier Tangenten an C_3 gezogen werden.“

Vom Punkte S der Curve C_3 gehen unendlich viele Strahlen aus, von welchen die Curve in je zwei von S verschiedenen Punkten geschnitten wird. Jedes dieser Punktenpaare kann durch eine Raumcurve III. Ordnung verbunden werden, welche dem ersten Curvensystem der Fläche F III. Ordnung angehört; und aus früheren Sätzen (pag. 179) ergibt sich, dass alle so bestimmten Raumcurven in einem Punkte P von C_3 sich schneiden. Auch haben wir bereits bewiesen, dass der Curvenbüschel P des ersten Systemes projectivisch auf den Strahlenbüschel S bezogen ist, wenn jeder Curve von P ihre durch S gehende Secante zugewiesen wird. Mit einer beliebigen Raumcurve k des zweiten Systemes kann der Curvenbüschel P durch einen Flächenbüschel II. Ordnung verbunden werden, dessen Flächen in k und in der von P ausgehenden Secante von k sich schneiden. Auch dieser Flächenbüschel ist (pag. 183) projectivisch zu dem Curvenbüschel P und zu dem Strahlenbüschel S ; und zwar liegen die Punkte, welche irgend ein Strahl von S mit der entsprechenden Curve des Büschels P und mit der zugehörigen Fläche II. Ordnung gemein hat, auf der Curve C_3 . Der Flächenbüschel wird von der Ebene des Strahlenbüschels S in einem zu ihm projectivischen Kegelschnittbüschel geschnitten, dessen Kegelschnitte durch den Punkt P hindurchgehen, sowie durch die gemeinschaftlichen Punkte der Ebene und der Raumcurve k . Weil nun k beliebig im zweiten Curvensystem gewählt werden kann, so ergibt sich:

„Die ebene Curve C_3 III. Ordnung kann auf unendlich viele Arten durch einen Strahlenbüschel S und einen zu ihm projectivischen Kegelschnittbüschel erzeugt werden, sodass die Schnittpunkte jedes Strahles von S mit dem ihm entsprechenden Kegelschnitte auf C_3 liegen.“

Von den vier Punkten, welche die Kegelschnitte mit einander gemein haben können, dürfen wir zwei O und Q ganz beliebig

auf C_3 wählen, weil durch je zwei Punkte der Fläche F eine Curve k des zweiten Systemes gelegt werden kann; der dritte R liegt ebenfalls auf k . Der vierte Punkt P hängt nur scheinbar von der Wahl des Punktes S ab; denn wir werden sogleich zeigen, dass jedem der drei Punkte O, Q, R die Rolle zugetheilt werden kann, welche in obiger Untersuchung der Punkt P spielte, dass also P mit jedem beliebigen Punkte von C_3 vertauscht werden darf. Dagegen ist jeder von den vier Punkten bestimmt durch die drei übrigen und durch den Punkt S . Denn wenn O, P, Q und S gegeben sind, so finden wir R , indem wir O, P und Q mit irgend zwei Punkten von C_3 , die mit S in einer Geraden liegen, durch einen Kegelschnitt verbinden und den sechsten Durchschnittspunkt des letzteren mit C_3 aufsuchen.

Dass P mit O vertauscht werden kann, folgt aus dem Beweise des Satzes:

„Durch jede Curve, welche von einem Strahlenbüschel S mit einem zu S projectivischen Kegelschnittbüschel $(OPQR)$ erzeugt wird und folglich durch den Mittelpunkt von S sowie durch die vier gemeinschaftlichen Punkte $OPQR$ der Kegelschnitte hindurchgeht, kann eine Fläche III. Ordnung gelegt werden; oder die Curve ist von der III. Ordnung.“

Wir verbinden drei der letzteren vier Punkte, z. B. P, Q und R durch eine Raumcurve k III. Ordnung, nehmen auf dieser die Mittelpunkte von zwei Strahlenbündeln S_1 und S_2 beliebig an und beziehen die letzteren collinear so auf einander, dass sie das Secantensystem von k erzeugen. Durch O geht eine Secante von k , in welcher zwei homologe Ebenen α_1 und α_2 der Bündel sich schneiden. Seien s_1 und s_2 irgend zwei in resp. α_1 und α_2 liegende, homologe Strahlen der Bündel, so schneiden dieselben die Ebene $OPQR$ in zwei Punkten, welche einem und demselben Kegelschnitt des Büschels $(OPQR)$ angehören; denn die projectivischen Ebenenbüschel s_1 und s_2 erzeugen eine durch k und den Punkt O gehende Fläche II. Ordnung, auf welcher auch die Strahlen s_1 und s_2 liegen. Die beiden in α_1 und α_2 liegenden und einander entsprechenden Strahlenbüschel von S_1 und S_2 werden demnach von der Ebene $OPQR$ in zwei geraden Gebilden geschnitten, welche zu dem Kegelschnittbüschel $(OPQR)$ perspectivisch liegen (pag. 141); sie sind folglich auch zu dem Strahlenbüschel S projectivisch. Beziehen wir nun den Bündel S collinear auf S_1 und S_2 , sodass jene drei projectivischen Strahlenbüschel

einander entsprechen, so erzeugen die drei Bündel eine Fläche III. Ordnung, von welcher die gegebene ebene Curve offenbar ein Schnitt ist. Die verlangte collineare Beziehung kann auf unendlich viele Arten hergestellt werden (pag. 6).

Die Rolle des Punktes P kann also wirklich von jedem anderen Punkte O der Curve C_3 III. Ordnung übernommen werden, so dass allgemein sich ergibt:

„Werden auf der ebenen Curve C_3 III. Ordnung irgend vier Punkte S, P, Q, R angenommen, und verbindet man je zwei Punkte von C_3 , welche mit S in einer Geraden liegen, mit P, Q und R durch einen Kegelschnitt, so bilden alle diese Kegelschnitte einen zum Strahlenbüschel S projectivischen Kegelschnittbüschel, und auch der etwaige vierte gemeinschaftliche Punkt O der Kegelschnitte liegt auf C_3 .“

Ohne Weiteres leuchtet ein, dass auch folgende Umkehrung dieses Satzes gültig ist:

Werden durch vier beliebige Punkte O, P, Q, R einer ebenen Curve C_3 III. Ordnung Kegelschnitte gelegt, welche noch je zwei Punkte mit C_3 gemein haben, so schneiden sich die Verbindungslinien dieser Punktenpaare in einem und demselben Punkte S von C_3 . Der Kegelschnittbüschel $(O P Q R)$ ist projectivisch auf den Strahlenbüschel S bezogen, wenn jedem Kegelschnitt der so durch ihn gewonnene Strahl von S zugewiesen wird.

Von den Punkten O, P, Q, R dürfen übrigens keine drei in einer Geraden liegen, wenn der Satz Sinn haben soll. Dagegen dürfen je zwei derselben einander unbegrenzt sich nähern, so dass der Satz auch dann noch gilt, wenn die Kegelschnitte in zwei Punkten von C_3 geschnitten und in einem dritten berührt werden, oder wenn sie einander und die Curve C_3 in zwei verschiedenen Punkten berühren u. s. w. Der Punkt S soll der Gegenpunkt des Vierecks $O P Q R$ genannt werden.

Der letzte Satz enthält eine Haupt-Eigenschaft der ebenen Curven III. Ordnung, und wir können aus ihm viele andere Sätze ableiten; zunächst den folgenden:

„Durch acht beliebige Punkte O, P, Q, R, A, B, C, D der Ebene können unendlich viele Curven III. Ordnung gelegt werden; nämlich durch einen beliebigen neunten Punkt E geht eine einzige dieser Curven, und nur wenn E eine ganz besondere, durch die ersten acht Punkte völlig bestimmte

„Lage hat, gehen auch durch diesen neunten Punkt alle jene „Curven III. Ordnung.“

Wir wählen unter den gegebenen Punkten irgend vier O, P, Q, R , von denen keine drei in einer Geraden liegen, und legen durch dieselben einen Kegelschnittbüschel; bezeichnen ferner mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ diejenigen fünf Kegelschnitte dieses Büschels ($OPQR$), welche durch resp. A, B, C, D, E hindurchgehen. Alsdann können wir den Strahlenbüschel D projectivisch so auf ($OPQR$) beziehen, dass die Strahlen $\overline{DA}, \overline{DB}, \overline{DC}$ den resp. Kegelschnitten α, β, γ entsprechen; auch können wir zu den Kegelschnitten δ und ε die entsprechenden Strahlen $\overline{DD_1}$ und $\overline{DE_1}$ des Büschels D construiren. Wir denken uns jetzt durch A, B, C und D einen Kegelschnitt κ gelegt, welcher in D den Strahl $\overline{DD_1}$ berührt; derselbe wird vom Strahle $\overline{DE_1}$ in einem Punkte E_1 geschnitten und ist durch den Strahlenbüschel D projectivisch auf den Kegelschnittbüschel ($OPQR$) bezogen, so dass den Punkten A, B, C, D, E_1 von κ die resp. Kegelschnitte $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ entsprechen. Jeder Strahlenbüschel S , welcher zum Kegelschnitt κ perspectivisch liegt, erzeugt mit dem Kegelschnittbüschel ($OPQR$) eine Curve III. Ordnung, welche durch die acht Punkte O, P, Q, R, A, B, C, D hindurchgeht. Bestimmen wir nun auf κ den Mittelpunkt des Strahlenbüschels S so, dass aus ihm der Punkt E_1 durch den Strahl $\overline{SE}$ projecirt wird, so geht die Curve III. Ordnung auch durch den neunten Punkt E . Für eine beliebige Lage des Punktes S hat die Curve III. Ordnung mit dem Kegelschnitt κ die fünf Punkte S, A, B, C, D und folglich noch höchstens einen sechsten Punkt T gemein. Dieser Punkt T von κ liegt ebenso wie A, B, C und D auf dem ihm entsprechenden Kegelschnitt des Büschels ($OPQR$) und ist demnach auf jeder durch O, P, Q, R, A, B, C, D gehenden Curve III. Ordnung enthalten; und nur wenn E mit T zusammenfällt, gehen durch E alle jene Curven hindurch.

Beachtenswerth ist, dass wir keineswegs den Kegelschnitt κ zu zeichnen brauchen, sondern dass wir die Punkte E_1 und S desselben durch lineare Constructionen, z. B. mittelst des Pascalschen Satzes, finden können. Ebenso können wir auf dem Strahle $\overline{SA}$ den zweiten Durchschnittspunkt A_1 mit dem Kegelschnitt α linear construiren; und da A_1 auch der gesuchten Curve III. Ordnung angehört, so ist damit die Aufgabe gelöst:

„Von einer ebenen Curve C_3 III. Ordnung, welche durch neun „ihrer Punkte gegeben ist, denjenigen zehnten Punkt A_1 zu

„construiren, welcher mit irgend fünf der gegebenen Punkte „auf einem Kegelschnitt α liegt.“

Der Kegelschnittbüschel $(OPQR)$ enthält auch die drei Paare Gegenseiten des Vierecks $OPQR$. Suchen wir zu einem derselben, etwa zu $\overline{OP}$, $\overline{QR}$ den entsprechenden Strahl des Büschels S , so lösen wir die Aufgabe:

„Auf einer Geraden $\overline{OP}$, welche zwei von den gegebenen neun Punkten verbindet, den dritten Schnittpunkt mit der Curve „ C_3 III. Ordnung zu construiren.“

Sei l ein beliebiger Strahl des Büschels S und λ der ihm entsprechende Kegelschnitt des Büschels $(OPQR)$. Wenn dann l dem Strahle $\overline{SO}$ sich unbegrenzt nähert, so rückt auch einer der beiden Schnittpunkte von l und λ dem Punkte O unbegrenzt näher, und die Verbindungslinie von O mit diesem Schnittpunkte geht über in die Tangente der Curve C_3 im Punkte O ; zugleich ändert der Kegelschnitt λ sich so, daß er ebenfalls jene Verbindungslinie in O berührt. Bestimmen wir also im Punkte O die Tangente desjenigen Kegelschnittes, welcher dem Strahle $\overline{SO}$ entspricht, so lösen wir die Aufgabe:

„In einem der gegebenen neun Punkte, z. B. in O die Tangente der Curve C_3 III. Ordnung zu zeichnen.“

Mit Hülfe dieser Bemerkungen können auch leicht die Aufgaben gelöst werden: „Eine Curve III. Ordnung zu construiren, wenn von derselben gegeben sind entweder acht Punkte und die Tangente in einem derselben, oder sieben, sechs, fünf Punkte und die Tangenten in resp. zwei, drei, vier derselben.“ Wir übergehen die Ausführung dieser Aufgaben.

Aus dem Beweise des Satzes (pag. 190 unten) ergibt sich noch der folgende:

„Zwei ebene Curven III. Ordnung haben höchstens neun Punkte „ $O, P, Q, R, A, B, C, D, T$ mit einander gemein, welche mit „jedem zehnten Punkte E der Ebene durch eine Curve III. Ordnung verbunden werden können.“

„Legt man durch vier von den neun Punkten, z. B. durch O, P, Q, R einen Kegelschnittbüschel, und durch die übrigen „fünf einen Kegelschnitt α , so kann der letztere projectivisch „so auf den ersteren bezogen werden, daß den fünf Punkten „ A, B, C, D, T von α die resp. durch sie hindurchgehenden „Kegelschnitte des Büschels $(OPQR)$ entsprechen. Der Kegelschnitt α enthält auch die Gegenpunkte S des Vierecks $OPQR$

„hinsichtlich aller Curven III. Ordnung, welche durch die neun Punkte hindurchgehen.“

Es kann der Fall eintreten, dass von den neun Punkten irgend sechs auf einem Kegelschnitt liegen. Sei K ein beliebiger siebenter Punkt dieses Kegelschnitts, so kann auch K mit den neun Punkten durch eine Curve III. Ordnung verbunden werden; und da dieselbe mit dem Kegelschnitt sieben Punkte gemein hat, so zerfällt sie in diesen Kegelschnitt und eine Gerade. Also:

„Wenn von den neun Schnittpunkten zweier Curven III. Ordnung sechs auf einem Kegelschnitt enthalten sind, so liegen die drei übrigen in einer Geraden.“

Der Satz und sein Beweis gelten auch dann noch, wenn der Kegelschnitt in zwei Gerade zerfällt. Wir folgern daraus:

„Wird eine Curve C_3 III. Ordnung von drei Geraden a, b, c so in je drei Punkten geschnitten, dass sechs von den neun Schnittpunkten auf einer Curve II. Ordnung oder auch auf zwei neuen Geraden k und l enthalten sind, so liegen die drei letzten Schnittpunkte in einer Geraden m .“

Denn die drei Geraden a, b, c bilden eine zweite Linie III. Ordnung und durch die neun Schnittpunkte können folglich unendlich viele Curven III. Ordnung gelegt werden.

Wir könnten im vorigen Satze auch die Geraden k und l willkürlich annehmen und durch ihre sechs Schnittpunkte mit C_3 die drei Geraden a, b, c hindurchlegen, und würden alsdann eine neue Fassung des Satzes erhalten. Die Geraden k und l können einander unbegrenzt sich nähern, so dass a, b und c in drei Tangenten der Curve III. Ordnung übergehen. Alsdann ergibt sich:

„Legt man in den drei Punkten, welche die Curve C_3 III. Ordnung mit einer Geraden k gemein hat, Tangenten an C_3 , so schneiden diese die Curve in drei neuen Punkten, welche auf einer zweiten Geraden m liegen.“

Die Curve III. Ordnung hat auch mit der unendlich fernen Geraden mindestens einen Punkt und höchstens drei Punkte gemein, und jede Tangente eines unendlich fernen Punktes wird Asymptote genannt. Also:

„Die Curve III. Ordnung wird von ihren drei Asymptoten in drei Punkten geschnitten, welche in einer Geraden liegen.“

Wir haben bereits gesehen, dass die ebene Curve C_3 III. Ordnung in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfallen kann, aber

noch nicht bewiesen, dass dieses immer dann geschehen muss, wenn die Curve C_3 eine Gerade g enthält. In der That ist dieses nicht nothwendig, denn es ist der Fall denkbar, dass die Curve III. Ordnung sich ganz auf die Gerade g reducirt oder ausserhalb derselben nur einen einzigen Punkt besitzt. Wenn aber C_3 ausser g mehrere Punkte enthält, so liegen im Allgemeinen keine drei derselben in einer Geraden l ; denn sonst muss l mit C_3 auch noch den Punkt $l \cdot g$, also im Ganzen vier Punkte gemein haben, und folglich ebenfalls ganz der Curve C_3 angehören, und C_3 muss in drei Gerade zerfallen, von denen die dritte sich auch mit l oder g vereinigen kann. Wir können demnach irgend fünf der ausserhalb g liegenden Punkte durch eine Curve α II. Ordnung verbinden, welche mit g ebenfalls eine Curve III. Ordnung bildet. Jene fünf Punkte bilden mit drei beliebigen Punkten der Geraden g ein System von acht Punkten, welche mit jedem neunten Punkt der Ebene im Allgemeinen eine einzige Curve III. Ordnung bestimmen. Wählen wir nun den neunten Punkt ebenfalls auf der Geraden g , so fällt diese Curve III. Ordnung offenbar mit C_3 zusammen, zugleich aber mit der Curve III. Ordnung, welche aus g und dem Kegelschnitt α besteht. Also:

„Wenn eine Curve C_3 III. Ordnung eine Gerade g enthält, so
 „zerfällt sie im Allgemeinen in diese Gerade und einen Kegel-
 „schnitt α ; in besonderen Fällen kann sie auch aus g und
 „noch zwei oder einer Geraden bestehen, wenn sie sich nicht
 „etwa auf g und einen isolirten Punkt oder auch auf g allein
 „reducirt.“

Hieraus lässt sich leicht schliessen, dass von den neun Durchschnittspunkten zweier Curven III. Ordnung sechs auf einem Kegelschnitt oder auch auf zwei Geraden enthalten sein müssen, wenn die drei übrigen in einer Geraden liegen.

Zum Schluss möge noch der Satz hier eine Stelle finden:

„Eine Raumcurve IV. Ordnung, durch welche ein Flächen-
 „büschel II. Ordnung hindurchgeht, wird aus jedem ihrer
 „Punkte durch eine Kegelfläche III. Ordnung projecirt.“

Seien S und T zwei beliebige Punkte der Raumcurve; dann können wir den Strahlenbündel S in dreifacher Weise reciprok auf den Bündel T beziehen, so dass er mit T irgend drei Flächen des Flächenbüschels erzeugt. Der Punkt S erscheint dann als Mittelpunkt von drei collinearen Strahlenbündeln, und diese erzeugen (pag. 185) eine Kegelfläche III. Ordnung, deren Strahlen je

einen Punkt der Raumcurve IV. Ordnung projeciren. Wir folgern daraus:

„Eine Kegelfläche III. Ordnung wird von jeder Regelfläche, welche zwei Strahlen a, b mit der Kegelfläche gemein hat, ausserdem in einer Raumcurve IV. Ordnung geschnitten, durch welche ein Flächenbüschel II. Ordnung gelegt werden kann.“

Zum Beweise verbinden wir den Punkt a, b mit sieben beliebigen ausserhalb a und b gelegenen Schnittpunkten der Regelfläche und der Kegelfläche III. Ordnung durch eine neue Fläche II. Ordnung. Durch diese wird die Regelfläche in einer Raumcurve IV. Ordnung geschnitten, welche auch auf der Kegelfläche III. Ordnung liegen muss; denn sie wird aus dem Punkte a, b durch eine Kegelfläche III. Ordnung projecirt, welche mit der gegebenen ausser a und b noch sieben beliebige Strahlen gemein hat und folglich mit ihr identisch ist. — Ebenso lässt sich beweisen:

„Eine Kegelfläche III. Ordnung und eine Kegelfläche II. Ordnung, welche nicht concentrisch sind, aber sich längs eines Strahles berühren, schneiden sich ausserdem in einer Raumcurve IV. Ordnung, durch welche ein Flächenbüschel II. Ordnung gelegt werden kann.“

Fassen wir die Haupt-Ergebnisse dieses Vortrages noch einmal kurz zusammen, so erhalten wir für die Fläche III. Ordnung folgenden Satz:

Die Fläche III. Ordnung wird von jeder Ebene in einer Curve C_3 III. Ordnung geschnitten, welche durch neun auf ihr beliebig angenommene Punkte völlig bestimmt ist. Diese Schnittcurve zerfällt in eine Gerade und einen Kegelschnitt, wenn sie mit der Geraden mehr als drei Punkte oder mit dem Kegelschnitt mehr als sechs Punkte gemein hat; sie kann auch auf drei oder weniger als drei Gerade sich reduciren. Die Curve C_3 III. Ordnung hat mit einer zweiten Curve III. Ordnung höchstens neun Punkte gemein, von denen jeder durch die acht übrigen bestimmt ist; zwei Flächen III. Ordnung schneiden sich desshalb im Allgemeinen in einer Raumcurve IX. Ordnung. Mit einer Fläche II. Ordnung hat die Fläche III. Ordnung im Allgemeinen eine Raumcurve VI. Ordnung gemein.

Dreiundzwanzigster Vortrag.

Die siebenundzwanzig Geraden der Fläche dritter Ordnung und die auf der Fläche enthaltenen Kegelschnitte.

Wenn wir eine Fläche F III. Ordnung, welche durch drei collineare Strahlenbündel S, S_1, S_2 erzeugt wird, auf ein ebenes System Σ abbilden, indem wir Σ auf S, S_1, S_2 reciprok beziehen, so entspricht jedem Punkte von F ein einziger Punkt von Σ . Dagegen können in Σ gewisse Hauptpunkte vorkommen, denen mehr als ein Punkt von F , nämlich die sämtlichen Punkte von je einer Geraden entsprechen. Einem beliebigen Punkte von Σ entsprechen nämlich drei homologe Ebenen von S, S_1, S_2 , sowie deren in F gelegener Schnittpunkt; wenn aber diese drei Ebenen mehr als einen Punkt, also eine Gerade mit einander gemein haben, so ist der zugehörige Punkt von Σ ein solcher Hauptpunkt. Jene dem Hauptpunkt entsprechende Gerade wollen wir einen Hauptstrahl der Fläche F nennen; sie ist eine gemeinschaftliche Secante der drei Raumcurven III. Ordnung, welche die Bündel S, S_1, S_2 paarweise mit einander erzeugen. Und da diese Raumcurven als drei ganz beliebige des zweiten Curvensystemes von F betrachtet werden können, so lassen sich die Hauptpunkte von Σ auch folgendermassen definiren:

„Den Hauptpunkten der Ebene Σ entsprechen in der Fläche F III. Ordnung die gemeinschaftlichen Secanten des zweiten Curvensystemes von F ; wir nennen jede dieser Secanten einen Hauptstrahl der Fläche III. Ordnung.“

Die Hauptpunkte von Σ sind desshalb Doppelpunkte derjenigen Curven V. Ordnung, welche den Raumcurven des zweiten Systemes von F entsprechen.

Eine beliebige Ebene schneidet die Fläche F III. Ordnung in einer ebenen Curve C_3 , welche mit jeder auf F liegenden Geraden einen Punkt gemein hat. Daraus schliessen wir:

„Die Curven III. Ordnung von Σ , welche den ebenen Schnittcurven der Fläche F entsprechen, gehen durch alle Hauptpunkte von Σ .“

Legen wir nun durch eine beliebige Gerade g , welche mit F drei Punkte P, Q, R gemein hat, irgend zwei Ebenen, so schneiden diese die Fläche F in zwei Curven C_3 und C_3^1 , welche durch die Punkte P, Q, R hindurchgehen. Die Abbildungen von C_3 und C_3^1 haben ausser den drei Punkten, welche jenen dreien entsprechen, noch höchstens sechs Punkte gemein, und jeder der letzteren muss ein Hauptpunkt von Σ sein, weil ihm sowohl in C_3 als auch in C_3^1 ein Punkt entspricht. Diese sechs Hauptpunkte liegen nicht auf einem und demselben Kegelschnitt, weil sonst die drei übrigen in einer Geraden liegen müssten, was unmöglich ist; denn einer Geraden von Σ entspricht in der Fläche F eine Raumcurve III. Ordnung, welche mit der beliebigen Geraden g höchstens zwei Punkte gemein hat. Somit ergibt sich:

„Die Ebene Σ enthält höchstens sechs Hauptpunkte, welche
 „nicht auf einem und demselben Kegelschnitt liegen; und die
 „Fläche F besitzt höchstens sechs Hauptstrahlen oder gemein-
 „schaftliche Secanten des zweiten Curvensystemes. Wenn drei
 „collineare Strahlenbündel beliebig im Raume gegeben sind,
 „so giebt es im Allgemeinen höchstens sechs Gerade, in denen
 „je drei homologe Ebenen der Bündel sich schneiden.“

Wenn zwei Secanten einer Raumcurve III. Ordnung in einer Ebene liegen, so schneiden sie sich bekanntlich in einem Punkte der Curve. Da nun (pag. 182 oben) die Raumcurven des zweiten Curvensystemes nicht alle durch einen und denselben Punkt gehen sollen, so folgt:

„Keine zwei Hauptstrahlen der Fläche F liegen in einer
 „Ebene.“

Einem beliebigen geraden Gebilde g von Σ entspricht in der Fläche F eine Raumcurve γ des ersten Systemes; aber:

„Wenn ein gerades Gebilde g von Σ einen Hauptpunkt U ent-
 „hält, so zerfällt die ihm entsprechende Raumcurve γ III. Ord-
 „nung in den zugehörigen Hauptstrahl u und einen Kegelschnitt,
 „welcher einen Punkt mit u gemein hat.“

Dem geraden Gebilde g entsprechen in den Bündeln S, S_1, S_2 drei Ebenenbüschel, deren Axen den Hauptstrahl u schneiden, und der Ebenenbüschel von S erzeugt mit denjenigen von S_1 und S_2 zwei geradlinige Flächen II. Ordnung, welche die Axe des ersteren Büschels und den Hauptstrahl u gemein haben. Verbinden wir nun irgend drei andere gemeinschaftliche Punkte der beiden Flächen durch eine Ebene, so schneidet diese die Flächen

II. Ordnung in zwei Kegelschnitten, welche identisch sind; denn sie haben ausser jenen drei Punkten noch einen auf u und einen auf jener Axe liegenden Punkt mit einander gemein. Die Punkte dieses Kegelschnitts entsprechen aber den Punkten von g projectivisch.

Die Ebene des Kegelschnittes hat mit der Fläche F noch eine Gerade gemein, welche mit dem Kegelschnitt zusammen eine ebene Curve III. Ordnung ausmacht. Die Abbildung dieser Curve muss in die Gerade g und einen Kegelschnitt zerfallen, und der letztere muss durch alle von U verschiedenen Hauptpunkte der Ebene Σ hindurchgehen. Also:

„Einem Kegelschnitt, welcher irgend fünf Hauptpunkte von Σ mit einander verbindet, entspricht in der Fläche F eine Gerade, welche die entsprechenden fünf Hauptstrahlen schneidet; durch diese Gerade gehen die Ebenen aller Kegelschnitte von F , welche den Strahlen des sechsten Hauptpunktes von Σ entsprechen.“

Wenn ein gerades Gebilde g zwei Hauptpunkte U und V von Σ mit einander verbindet, so entsprechen ihm in den Bündeln S , S_1 , S_2 drei Ebenenbüschel, deren Axen die entsprechenden Hauptstrahlen u und v von F schneiden. Der Ebenenbüschel des Bündels S erzeugt mit denjenigen von S_1 und S_2 zwei Regelflächen, welche die Axe jenes Büschels und die Hauptstrahlen u und v mit einander gemein haben. Ist nun P ein ausserhalb dieser drei Geraden liegender Schnittpunkt der beiden Regelflächen, so gehen die letzteren noch durch eine vierte Gerade, welche den Punkt P enthält und die Geraden u und v schneidet; und diese vierte Gerade muss der Geraden g entsprechen; also:

„Jeder Geraden, welche zwei Hauptpunkte U und V von Σ mit einander verbindet, entspricht in F eine Gerade, welche die entsprechenden beiden Hauptstrahlen u und v schneidet.“

Zugleich ergibt sich:

„Keine drei Hauptpunkte der Ebene Σ liegen in einer Geraden.“

Denn enthielte ein gerades Gebilde g drei Hauptpunkte, so würden die ihm entsprechenden Ebenenbüschel von S , S_1 , S_2 zu derjenigen Regelschaar perspectivisch liegen, welcher die zugehörigen drei Hauptstrahlen von F angehören. Die Fläche F würde alsdann in eine Regelfläche und eine Ebene zerfallen.

Wir wollen diejenige Gerade von F , welche der Verbindungs-

linie von irgend zwei Hauptpunkten U und V entspricht, mit einem beliebigen Punkte P von F durch eine Ebene verbinden. Diese Ebene schneidet die Fläche F in einer Curve C_3 III. Ordnung, welche aus jener Geraden und einem durch P gehenden Kegelschnitt besteht. Die Abbildung von C_3 in Σ zerfällt in die Gerade $\overline{UV}$ und einen Kegelschnitt, welcher alle von U und V verschiedenen Hauptpunkte enthält, sowie denjenigen Punkt, welcher dem P entspricht. Da P beliebig auf F gewählt wurde, so ist sein entsprechender Punkt als ein beliebiger Punkt von Σ anzusehen. Wir schliessen daraus:

„Den sämtlichen Kegelschnitten, welche durch vier Hauptpunkte von Σ gelegt werden können, entsprechen in F wiederum Kegelschnitte; die Ebenen der letzteren schneiden sich in derjenigen Geraden, welche der Verbindungslinie der letzten beiden Hauptpunkte entspricht.“

Dieser Satz erleidet natürlich eine Aenderung, wenn weniger als sechs Hauptpunkte vorhanden sind.

Wir wollen zunächst den besonders interessanten Fall untersuchen, in welchem die Ebene Σ sechs Hauptpunkte besitzt. Dieselben können als Eckpunkte eines vollständigen Sechsecks betrachtet werden, welchem kein Kegelschnitt umschrieben werden kann. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich:

Jedem der sechs Eckpunkte und jeder der fünfzehn Seiten dieses Sechsecks entspricht eine Gerade der Fläche F , ebenso jedem der sechs Kegelschnitte, welche durch je fünf der Eckpunkte gelegt werden können. Die Fläche F III. Ordnung enthält demnach siebenundzwanzig Gerade.

Von den auf F enthaltenen Geraden können keine vier zu einer und derselben Regelschaar gehören; denn sonst würde jeder Leitstrahl der Regelschaar vier Punkte mit der Fläche F gemein haben und folglich ganz auf F liegen, so dass die Fläche III. Ordnung in eine Regelfläche und eine Ebene zerfallen würde.

Die gegenseitige Lage dieser siebenundzwanzig Geraden lässt sich mit Hülfe des vollständigen Sechsecks leicht übersehen. Wir bezeichnen zunächst mit $1, 2, 3, 4, 5, 6$ die sechs Hauptpunkte der Ebene Σ , mit μ, ν irgend zwei derselben, und mit (μ) denjenigen Kegelschnitt, welcher durch die fünf von μ verschiedenen Hauptpunkte hindurchgeht. Dann möge a_μ denjenigen Hauptstrahl der Fläche F bezeichnen, welcher dem Hauptpunkte μ entspricht,

und b_μ diejenige Gerade, welche dem Kegelschnitt (μ) entspricht; ferner entspreche der Seite $\overline{\mu\nu}$ des Sechsecks eine Gerade $c_{\mu\nu}$ oder $c_{\nu\mu}$ von F . Die siebenundzwanzig Geraden sind dann bezeichnet wie folgt:

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{45} & c_{46} \\ c_{56} \end{array}$$

Theils aus dem Früheren, theils aus der Abbildung der siebenundzwanzig Geraden in der Ebene Σ ergibt sich dann ohne Weiteres:

„Die Gerade a_μ wird von nur zehn der übrigen sechsundzwanzig Geraden geschnitten, nämlich von allen Geraden b , ausgenommen b_μ , und von allen Geraden c , welche den Index μ besitzen. Ebenso wird b_μ von zehn der übrigen Geraden geschnitten, nämlich von allen a ausser a_μ und von allen c mit dem Index μ . Die Gerade $c_{\mu\nu}$ wird geschnitten von den vier Geraden $a_\mu, a_\nu, b_\mu, b_\nu$, sowie von denjenigen sechs Geraden c , welche weder den Index μ noch den Index ν besitzen.“

Die Gerade c_{12} z. B. wird von den Geraden $a_1, a_2, b_1, b_2, c_{34}, c_{35}$ u. s. w. geschnitten, weil ihre Abbildung $\overline{12}$ durch die Hauptpunkte 1, 2 hindurchgeht und mit den Abbildungen (1), (2), $\overline{34}$, $\overline{35}$ etc. der übrigen genannten Geraden je einen Punkt gemein hat, der kein Hauptpunkt ist.

„Jede der 27 Geraden wird also von zehn der übrigen geschnitten und bildet mit denselben fünf Dreiecke; so dass die 27 Geraden sich in 135 Punkten δ schneiden und 45 Dreiecke $\triangle$ bilden.“

Die zehn Geraden, von welchen a_1 geschnitten wird, bilden z. B. mit a_1 die Dreiecke:

$$a_1 b_2 c_{12}; a_1 b_3 c_{13}; a_1 b_4 c_{14}; a_1 b_5 c_{15}; a_1 b_6 c_{16};$$

ebenso schneiden sich in b_1 die Ebenen der fünf Dreiecke:

$$b_1 a_2 c_{12}; b_1 a_3 c_{13}; b_1 a_4 c_{14}; b_1 a_5 c_{15}; b_1 a_6 c_{16};$$

und von den zehn Geraden, welche c_{12} schneiden, werden mit c_{12} die Dreiecke gebildet:

$$c_{12} a_1 b_2; c_{12} a_2 b_1; c_{12} c_{34} c_{56}; c_{12} c_{35} c_{46}; c_{12} c_{36} c_{45}.$$

Die Geraden a und b haben eine bemerkenswerthe gegenseitige Lage. Je fünf der Geraden a werden von einer der Geraden b geschnitten, und folglich je vier der Geraden a von zwei der Geraden b ; auch hat jede Regelfläche, welche drei der Geraden a enthält, noch ausserdem drei Gerade b mit der Fläche F III. Ordnung gemein. Da nun keine zwei der Geraden a in einer Ebene liegen, so folgt:

„Keine zwei der Geraden b liegen in einer Ebene; je fünf, vier, drei, zwei, eine der Geraden b werden von resp. einer, zwei, drei, vier, fünf der Geraden a geschnitten; die Geraden b haben demnach dieselbe Lage zu den Geraden a , wie diese zu jenen.“

Wir wollen mit Herrn Schläfli eine Gruppe von zweimal sechs Geraden, welche die gegenseitige Lage der Geraden a und b zu einander haben, eine Doppelsechs nennen. Eine Doppelsechs, wie

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{array}$$

ist also dadurch gekennzeichnet, dass eine beliebige unter ihren zwölf Geraden nur diejenigen fünf von den übrigen elf schneidet, welche mit ihr weder in derselben Horizontal- noch in derselben Vertical-Spalte stehen. Wir unterscheiden zwei Hälften an der Doppelsechs; im vorliegenden Fall wird die eine Hälfte von den Geraden a , die andere von den Geraden b gebildet.

Wir können leicht zeigen, dass die 27 Geraden der Fläche III. Ordnung nicht weniger als 36 solche Doppelsechs mit einander bilden; vorher beweisen wir den Satz:

„Die Gerade b_μ wird nur von denjenigen Geraden c geschnitten, welche den Index μ besitzen. Zwei Gerade c mit einem gemeinschaftlichen Index μ können nicht in einer Ebene liegen.“
Würde z. B. b_1 von c_{23} geschnitten, so würden die vier Strahlen c_{23} , a_4 , a_5 , a_6 derjenigen Regelschaar angehören, von welcher b_1 , b_2 , b_3 drei Leitstrahlen sind; was unmöglich ist. Und wenn z. B. c_{12} mit c_{13} in einer Ebene läge, so müsste diese Ebene auch die Geraden c_{45} , c_{46} , c_{56} enthalten, weil dieselben mit c_{12} und c_{13} je einen Schnittpunkt gemein haben; die Fläche F III. Ordnung hätte somit fünf Gerade mit der Ebene gemein, was ebenfalls unmöglich ist.

Ausser der oben angegebenen Doppelsechs können wir nun u. A. die beiden folgenden bilden:

$$\begin{array}{cccccc} c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & a_6 & b_6 \\ c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & a_1 & b_1 \end{array} \text{ und } \begin{array}{cccccc} c_{12} & c_{23} & c_{31} & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_3 & b_1 & b_2 & c_{56} & c_{64} & c_{45} \end{array}$$

Die Geraden $c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}$ der ersteren Doppelsechs bilden sich in der Ebene Σ ab als vier Gerade, welche den Hauptpunkt 1 mit vier anderen Hauptpunkten 2, 3, 4, 5 verbinden; und da wir jeden Hauptpunkt mit einem anderen vertauschen können, so erhalten wir nach Analogie dieser ersteren im Ganzen 15 Doppelsechs. Die Geraden c_{12}, c_{23}, c_{31} der letzteren Doppelsechs entsprechen den Seiten des Dreiecks 123 von Σ ; die sechs Hauptpunkte bilden mit einander zwanzig Dreiecke, also lassen sich nicht weniger als zwanzig Doppelsechs nach dem zweiten Schema zusammensetzen.

„Die 27 Geraden der Fläche III. Ordnung bilden sonach im Ganzen $1 + 15 + 20 = 36$ Doppelsechs, und jede der Geraden kommt in 16 dieser Doppelsechs vor.“

Aus der Betrachtung des Sechsecks von Σ , welches zusammen mit den sechs Kegelschnitten (μ) die Abbildung der 27 Geraden darstellt, ergibt sich ausserdem sofort:

„Je vier Gerade der Fläche F , von denen keine zwei sich schneiden, bestimmen eine Doppelsechs, zu deren einer Hälfte die vier Geraden gehören.“

Die Fläche III. Ordnung kann keine 28ste Gerade g enthalten. Denn wenn eine solche vorhanden ist, so schneidet sie jedenfalls keine drei der Hauptstrahlen a , weil diese schon von drei der Strahlen b geschnitten werden und keine vier Gerade der Fläche zu einer und derselben Regelschaar gehören können. Ferner wird die Gerade g in der Ebene Σ entweder durch eine Gerade oder durch einen Kegelschnitt abgebildet; denn diejenigen Ebenen des Bündels S , welche mit den homologen Ebenen von S_1 je einen Punkt der Geraden g gemein haben, bilden (pag. 173) einen Ebenenbüschel I. oder II. Ordnung. Daraus folgt, dass die Abbildung jedes Kegelschnitts von F , welcher mit g in einer Ebene liegt, entweder ein Kegelschnitt oder eine Gerade sein muss, und durch mindestens vier Hauptpunkte von Σ hindurchgeht. Die Abbildung kann keine Gerade sein, weil eine solche höchstens zwei Hauptpunkte enthalten kann, auch kann sie keiner von den sechs Kegelschnitten (μ) sein, weil diesen die sechs Geraden b entsprechen; wäre sie aber ein Kegelschnitt, der nur vier Hauptpunkte enthielte, so müsste g mit einer der Geraden c identisch sein, weil ihre Abbildung mit der Verbindungslinie der

beiden letzten Hauptpunkte zusammenfiele. Die Annahme einer 28sten Geraden g ist deshalb unhaltbar. Wir können dieses Ergebniss auch wie folgt aussprechen:

„Die Ebene jedes auf der Fläche III. Ordnung enthaltenen Kegelschnitts geht durch eine der 27 Geraden der Fläche.“

Wir wollen eine beliebige der auf F' enthaltenen Doppelsechs bezeichnen durch:

$$\begin{array}{cccccc} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array}$$

und können dann beweisen:

„Durch fünf Strahlen d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 , welche der einen Hälfte einer solchen Doppelsechs angehören, sind die 27 Geraden der Fläche III. Ordnung und die Fläche selbst völlig bestimmt.“

Von der Geraden e_6 werden die fünf gegebenen Strahlen d , und von den übrigen Geraden e werden je vier derselben geschnitten. Die Geraden e sind daher construierbar (I. Abth. pag. 140), und mit ihrer Hülfe finden wir die Gerade d_6 , welche die ersten fünf Geraden e schneiden muss. Ferner schneiden sich die beiden Ebenen $\overline{d_\mu e_\nu}$ und $\overline{d_\nu e_\mu}$ in einer der übrigen fünfzehn Geraden $f_{\mu\nu}$ der Fläche F ; denn die Schnittlinie $f_{\mu\nu}$ hat mit der Fläche vier, auf resp. $d_\mu, d_\nu, e_\mu, e_\nu$ liegende Punkte gemein und ist desshalb ganz auf der Fläche enthalten. Sobald auf diese Weise die 27 Geraden gefunden sind, kann jede ebene Schnittlinie der Fläche III. Ordnung mittelst der Punkte construirt werden, in welchen die Schnittlinie den 27 Geraden begegnet.

Um eine Doppelsechs im Raum zu construiren, können wir, wie gleichzeitig sich ergibt, einen Strahl e_6 der einen Hälfte willkürlich annehmen und diesen durch fünf beliebige Strahlen d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 , welche der anderen Hälfte angehören sollen, schneiden. Nur dürfen von den fünf Strahlen d keine zwei in einer Ebene und keine vier in einer Regelfläche liegen.

Durch die vier Strahlen d_1, d_2, d_3, d_4 und drei beliebige Punkte S, S_1, S_2 des Raumes kann nur eine Fläche III. Ordnung gelegt werden; dieselbe wird erzeugt durch die drei Strahlenbündel S, S_1, S_2 , wenn dieselben collinear so auf einander bezogen werden, dass in d_1, d_2, d_3, d_4 je drei homologe Ebenen sich schneiden. Gingen nämlich durch $d_1, d_2, d_3, d_4, S, S_1, S_2$ zwei Flächen III. Ordnung hindurch, so müssten dieselben auch die Geraden e_5 und e_6 enthalten, weil diese je vier, auf d_1, d_2, d_3, d_4

gelegene Punkte mit den Flächen gemein haben. Von der Ebene SS_1S_2 würden ferner die Flächen in einer und derselben Curve C_3 III. Ordnung geschnitten; denn die sechs auf $d_1, d_2, d_3, d_4, e_5, e_6$ gelegenen Schnittpunkte können mit den drei beliebig gegebenen Punkten S, S_1, S_2 nur durch eine einzige Curve C_3 III. Ordnung verbunden werden. Eine beliebige neue Ebene endlich, welche mit C_3 irgend drei Punkte A, B, C gemein hat, müsste die beiden Flächen III. Ordnung ebenfalls in einer und derselben Curve C_3^1 III. Ordnung schneiden, welche die Punkte A, B, C mit sechs auf $d_1, d_2, d_3, d_4, e_5, e_6$ gelegenen Punkten verbindet. Denn wenn durch diese neun Punkte mehr als eine Curve III. Ordnung hindurchginge, so müssten die letzten sechs Punkte auf einem Kegelschnitt liegen, weil A, B und C auf einer und derselben Geraden enthalten sind; dieses ist aber unmöglich, weil d_1, d_2, d_3, d_4 nicht einer und derselben Regelschaar angehören. Die beiden Flächen III. Ordnung würden folglich unendlich viele ebene Schnittcurven mit einander gemein haben, was unmöglich ist.

Wählen wir nun die drei Punkte S, S_1, S_2 beliebig auf der ursprünglich gegebenen Fläche F III. Ordnung, so fällt jene durch d_1, d_2, d_3, d_4 und S, S_1, S_2 gelegte Fläche III. Ordnung mit F zusammen. Die vier Strahlen d_1, d_2, d_3, d_4 erscheinen als Hauptstrahlen der Fläche, und folglich auch d_5 und d_6 , weil die sechs Hauptstrahlen die eine Hälfte einer Doppelsechs ausmachen und weil jede Doppelsechs der Fläche durch vier Strahlen ihrer einen Hälfte völlig bestimmt ist. Daraus folgt:

„Die Fläche F III. Ordnung kann auf 72 verschiedene Arten durch drei collineare Strahlenbündel S, S_1, S_2 erzeugt werden, deren Mittelpunkte beliebig auf F anzunehmen sind. Man kann nämlich die Bündel so auf einander beziehen, dass in jeder der sechs Geraden $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$, welche eine Hälfte von einer der 36 Doppelsechs bilden, je drei homologe Ebenen der Bündel sich schneiden, und erhält dadurch eine der 72 Erzeugungsarten; den Strahlen d wird hiedurch die Rolle der sechs Hauptstrahlen zugetheilt. Es giebt demnach 72 Systeme von Raumcurven III. Ordnung auf der Fläche, oder 36 Paare von solchen Curvensystemen; nämlich je zwei Curvensysteme, welche von den beiden Hälften einer Doppelsechs herrühren, haben dieselben gegenseitigen Beziehungen, wie das früher betrachtete erste und zweite Curvensystem.“

Wählen wir unter den 45 Dreiecken $\triangle$, welche durch die 27 Geraden der Fläche F III. Ordnung gebildet werden, zwei solche, welche keine der 27 Geraden mit einander gemein haben, so schneiden sich die Ebenen derselben in einer Geraden k , und da diese höchstens drei Punkte mit F gemein hat, so treffen sich die Seiten beider Dreiecke paarweise auf ihr in drei Punkten δ . Die drei Verbindungs-Ebenen dieser Seitenpaare bilden ein Dreikant T_1 (oder Steiner'sches Trieder) und schneiden die Fläche F in drei neuen Geraden, welche aus dem eben genannten Grunde gleichfalls in einer Ebene liegen und ein neues Dreieck $\triangle$ bilden. Und die Ebene des letzteren bildet mit denjenigen der beiden zuerst angenommenen Dreiecke $\triangle$ ein zweites Dreikant T , welches „zu dem ersteren T_1 conjugirt“ genannt wird. Jedes der beiden conjugirten Dreikante wird von den Ebenen des anderen in drei von den Dreiecken $\triangle$ geschnitten. Wir können beispielsweise drei Paare von solchen conjugirten Dreikanten durch folgende Gruppen von je neun Geraden darstellen:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & b_2 & c_{12} & a_4 & b_5 & c_{45} & c_{14} & c_{25} & c_{36} \\ b_3 & c_{23} & a_2 & b_6 & c_{56} & a_5 & c_{35} & c_{16} & c_{24} \\ c_{13} & a_3 & b_1 & c_{46} & a_6 & b_4 & c_{26} & c_{34} & c_{15} \end{array}$$

Drei Gerade einer jeden Gruppe liegen in einer Ebene, wenn sie entweder in derselben Horizontal- oder in derselben Vertical-Spalte stehen. Die drei Vertical-Spalten stellen also die Ebenen des einen Dreikantes T und die Horizontal-Spalten diejenigen des conjugirten Dreikantes T_1 dar. Die vorliegenden drei Paare conjugirter Trieder enthalten alle 27 Geraden der Fläche III. Ordnung.

„Jedes Dreieck $\triangle$ kommt in 16 verschiedenen Triedern vor, „so dass 16 Triederscheitel in seine Ebene fallen.“

Das Dreieck hat nämlich mit 12 von den übrigen 44 Dreiecken je eine Seite gemein, weil durch jede der 27 Geraden fünf Dreiecks-Ebenen hindurchgehen. Es bleiben also 32 Dreiecke übrig, von denen jedes mit dem gegebenen ein solches Dreikant bestimmt. Weil aber auch die dritte Ebene des Dreikantes durch eines dieser 32 Dreiecke hindurchgeht, so kommt das gegebene Dreieck nicht in 32, sondern nur in 16 verschiedenen Dreikanten vor. Daraus folgt:

„Die Ebenen der 45 Dreiecke $\triangle$ bilden im Ganzen $\frac{16 \cdot 45}{3} = 240$

„solche Dreikante oder 120 Paare conjugirter Dreikante T

„und T_1 . Diese Paare ordnen sich zu drei und drei in 40 Gruppen, von denen jede Gruppe alle 27 Geraden der Fläche enthält.“

Die Existenz der 27 Geraden und alle die letzteren betreffenden Sätze haben wir unter der Voraussetzung bewiesen, dass die Ebene Σ , auf welche die Fläche III. Ordnung abgebildet wurde, nicht weniger als sechs Hauptpunkte besitze. Wir wollen jetzt diese Voraussetzung fallen lassen, und unter der Annahme, dass mindestens eine Gerade g auf der Fläche vorkomme, weitere Eigenschaften derselben beweisen.

Die Ebenen des Büschels g schneiden die Fläche F im Allgemeinen nicht bloss in g , sondern ausserdem in Kegelschnitten, von denen irgend zwei mit α und β bezeichnet werden mögen. Wählen wir nun in F irgend vier Punkte O, P, Q, R , die ausserhalb g , α und β und nicht alle in einer Ebene liegen, so können wir dieselben mit α durch eine einzige Fläche II. Ordnung verbinden; denn O, P, Q, R können mit irgend fünf Punkten von α durch eine Fläche II. Ordnung verbunden werden (pag. 133), welche dann alle Punkte des Kegelschnitts α enthalten muss. Diese Fläche II. Ordnung wird von derjenigen, welche die Punkte O, P, Q, R mit β verbindet, in einer Raumcurve k_4 IV. Ordnung geschnitten, und letztere geht durch O, P, Q und R hindurch. Sei nun N derjenige Punkt, in welchem die Fläche F zum dritten Male von der Geraden $\overline{OP}$ geschnitten wird; dann können wir den Flächenbüschel II. Ordnung, dessen Flächen in der Raumcurve k_4 sich schneiden, projectivisch so auf den Ebenenbüschel g beziehen, dass den drei durch α, β, N gehenden Ebenen des letzteren die drei durch resp. α, β, N gehenden Flächen des ersteren entsprechen. Die beiden Büschel erzeugen eine Fläche F_1 , welche durch k_4 hindurchgeht und mit F die Gerade g , die Kegelschnitte α und β so wie die Punkte N, O, P, Q, R gemein hat. Wir können leicht zeigen, dass die Flächen F und F_1 identisch sind.

Zunächst ergibt sich aus der Erzeugungsart der Fläche F_1 , dass dieselbe von jeder Ebene in einer Curve III. Ordnung geschnitten wird (pag. 189). Die Ebene $\overline{NOPQ}$ schneidet nun die Flächen F und F_1 in zwei Curven III. Ordnung, welche ausser den Punkten N, O, P, Q noch fünf Punkte gemein haben, nämlich je zwei Punkte von α und β *)

*) Die Kegelschnitte α und β können offenbar immer so gewählt werden, dass sie mit der Ebene $\overline{OPQ}$ je zwei Schnittpunkte gemein haben.

und einen Punkt von g ; und da O , P und Q ganz beliebig auf der Fläche F gewählt wurden, so müssen jene beiden Curven C_3 III. Ordnung zusammenfallen. Ebenso hat die Ebene $NOPR$ eine und dieselbe Curve C_3^1 III. Ordnung mit den Flächen F und F_1 gemein. Nehmen wir nun eine dritte Ebene beliebig an, welche mit C_3 und C_3^1 je drei und mit α und β je zwei Punkte gemein hat, so schneidet auch diese die Flächen F und F_1 in einer und derselben Curve III. Ordnung, von welcher eilf Punkte bereits bekannt sind. Hieraus aber folgt die Identität der Flächen F und F_1 , und zugleich der Satz:

„Wird durch irgend einen Kegelschnitt α der Fläche F III. Ordnung eine beliebige Fläche II. Ordnung gelegt, so wird F von dieser im Allgemeinen noch in einer Raumcurve k_4 IV. Ordnung geschnitten, durch welche ein Flächenbüschel II. Ordnung hindurchgeht. Von den Flächen dieses Büschels wird F in k_4 und in Kegelschnitten getroffen, deren Ebenen sich in einer Geraden g der Fläche F schneiden. Der Flächenbüschel II. Ordnung ist durch diese Kegelschnitte projectivisch auf den Ebenenbüschel g bezogen, so dass beide mit einander die Fläche III. Ordnung erzeugen. Vier beliebige Punkte O, P, Q, R der Fläche F , welche nicht in einer Ebene liegen, können so oft durch eine solche Raumcurve k_4 IV. Ordnung mit einander verbunden werden, als Gerade auf der Fläche F vorkommen.“

Wenn in dem Flächenbüschel II. Ordnung irgend eine Fläche vorkommt, die mit der entsprechenden Ebene des Büschels g keinen Punkt gemein hat, so enthält die Fläche III. Ordnung nur solche Gerade, die von g geschnitten werden. Diese Bemerkung kann zum Ausgangspunkte einer Untersuchung derjenigen Flächen III. Ordnung gemacht werden, welche weniger als 27 Gerade enthalten.

Die Erzeugung der Fläche F III. Ordnung durch einen Flächenbüschel und einen Ebenenbüschel haben wir bereits früher (pag. 145) untersucht; wir schliessen aus den damals bewiesenen Sätzen:

„Die sämtlichen Kegelschnitte von F , deren Ebenen eine Gerade g der Fläche mit einander gemein haben, schneiden diese Gerade in einem involutorischen geraden Gebilde.“

Die Ebene eines solchen Kegelschnittes berührt die Fläche F in denjenigen beiden Punkten, welche der Kegelschnitt mit der Ge-

raden g gemein hat und welche in g einander zugeordnet sind. Wenn der Kegelschnitt in zwei Gerade zerfällt, die mit g ein Dreieck $\triangle$ bilden, so ist seine Ebene eine dreifach berührende; die Fläche III. Ordnung besitzt also höchstens 45 dreifach berührende Ebenen.

Seien g, g_1, g_2 die Seiten eines auf F liegenden Dreiecks $\triangle$, und $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ irgend drei Kegelschnitte von F , deren Ebenen durch resp. g, g_1, g_2 hindurchgehen und so gewählt sind, dass die drei Kegelschnitte paarweise mit einander zwei Punkte gemein haben. Verbinden wir dann α mit irgend vier Punkten O, P, Q, R , von denen drei auf α_1 und einer auf α_2 liegt, durch eine Fläche II. Ordnung, so geht dieselbe auch durch α_1 , weil sie fünf Punkte mit α_1 gemein hat, und aus demselben Grunde durch α_2 . Die Raumcurve k_4 IV. Ordnung, von der vorhin die Rede war, zerfällt also bei dieser Wahl der Punkte O, P, Q, R in die beiden Kegelschnitte α_1 und α_2 , und jeder Kegelschnitt β der Fläche F , welcher mit g in einer Ebene liegt, kann mit α_1 und α_2 durch eine Fläche II. Ordnung verbunden werden. Ebenso aber kann jeder Kegelschnitt β_1 von F , dessen Ebene durch g_1 hindurchgeht, mit β und α_2 durch eine Fläche II. Ordnung verbunden werden; oder:

„Drei beliebige Kegelschnitte von F , deren Ebenen durch die resp. Seiten eines auf F liegenden Dreiecks $\triangle$ hindurchgehen, können stets durch eine Fläche II. Ordnung verbunden werden.“

Sehr leicht ist folgende Umkehrung dieses Satzes zu beweisen:

„Hat eine Fläche II. Ordnung mit der Fläche F III. Ordnung irgend drei Kegelschnitte gemein, so gehen die Ebenen derselben allemal durch die drei Seiten eines Dreiecks $\triangle$ von F .“

Zu jedem Dreieck $\triangle$ kann ein ganzes System solcher Flächen II. Ordnung construiert werden, und diese Flächen schneiden jede Dreiecksseite in einem involutorischen geraden Gebilde, in welchem auch die beiden, auf der Seite liegenden Eckpunkte einander zugeordnet sind. Durch eine beliebige unter den Flächen II. Ordnung ist nun entweder ein oder kein Eckpunkt des Dreiecks von den beiden anderen getrennt; daraus folgt:

„Entweder gehen durch eine einzige oder durch jede Seite des Dreiecks $\triangle$ zwei Ebenen, von denen jede mit F einen, die Seite berührenden Kegelschnitt gemein hat.“

Ausser der allgemeinen Fläche III. Ordnung, auf deren Unter-

suchung wir uns hier beschränken müssen, giebt es noch solche mit ein, zwei, drei oder vier sogenannten Knotenpunkten, in denen alle auf der Fläche enthaltenen Raumcurven III. Ordnung sich schneiden (pag. 181), sowie die geradlinige Fläche III. Ordnung. Die letztere wird erzeugt durch drei collineare Strahlenbündel von solcher Lage, dass irgend drei homologe Strahlenbündel derselben zu einem und demselben geraden Gebilde u perspectivische Lage haben. Die Fläche geht zweimal durch die Gerade u und wird von jeder Ebene des Büschels u in noch einer Geraden geschnitten. Wir werden diese geradlinige Fläche III. Ordnung im Anhang genauer untersuchen. *cfr. pag. 92.*

Anhang.

Constructions-Aufgaben und Lehrsätze zur ersten Abtheilung. *)

Harmonische Gebilde.

✓1. Zu drei Elementen eines einförmigen Grundgebildes das vierte harmonische zu construiren (pag. 34 und 38).

✓2. Nach dem (unzugänglichen) Schnittpunkte von zwei Geraden aus einem gegebenen Punkte ihrer Ebene eine dritte Gerade zu ziehen (pag. 3 und 36).

✓3. Auf der einen von zwei Parallelen ist eine Strecke AB gegeben; dieselbe soll halbirt werden ohne Benutzung des Cirkels (pag. 38).

✓4. Sind A, B, C, D vier harmonische Punkte und beschreibt man über der Strecke AC als Durchmesser einen Kreis, von welchem S ein beliebiger Punkt ist, so wird derjenige Kreisbogen, welcher innerhalb des Winkels BSD liegt, entweder von A oder von C halbirt (vergl. pag. 37).

✓5. Zwischen den Schenkeln a, b eines Winkels ist eine Gerade AB so zu ziehen, dass sie in einem gegebenen Punkte P halbirt wird, oder auch so, dass die Strecke PB doppelt so gross ist, wie die Strecke PA (pag. 37 unten).

*) Die Angaben von Seiten beziehen sich auf die erste Abtheilung des Buches.

Projectivische Verwandtschaft einförmiger Grundgebilde.

6. Zwei gerade Gebilde u , u_1 werden perspectivisch auf einander bezogen und sodann in schiefe Lage gebracht, also beliebig gegen einander verschoben. Es sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte zu zeichnen, d. h. der Strahlenbüschel II. Ordnung, welchen u und u_1 erzeugen.

7. Zwei Strahlenbüschel werden perspectivisch auf einander bezogen und sodann in schiefe Lage gebracht, z. B. gegen einander verdreht; die von ihnen erzeugte Curve II. Ordnung, auf welcher je zwei homologe Strahlen der Büschel sich schneiden, ist zu zeichnen.

8. Zwei gerade Gebilde u und u_1 liegen perspectivisch zu einem dritten u_2 ; der von u und u_1 erzeugte Strahlenbüschel II. Ordnung ist zu zeichnen.

9. Zwei Strahlenbüschel S und S_1 liegen perspectivisch zu einem dritten S_2 ; die von S und S_1 erzeugte Curve II. Ordnung ist zu zeichnen.

10. Von zwei projectivischen geraden Gebilden u und u_1 sind drei Paare einander entsprechender Punkte A und A_1 , B und B_1 , C und C_1 gegeben; zum beliebigen Punkte D von u den entsprechenden Punkt D_1 von u_1 zu bestimmen (pag. 49 und 59), sowie den Strahlenbüschel I. oder II. Ordnung zu zeichnen, welchen u mit u_1 erzeugt. Wenn u und u_1 in derselben Geraden liegen, so ist natürlich nur der erste Theil dieser Aufgabe auszuführen.

11. Die analoge Construction für zwei projectivische Strahlenbüschel auszuführen (pag. 59).

12. Von einer Curve II. Ordnung sind gegeben fünf Punkte, oder vier Punkte und die Tangente in einem derselben, oder drei Punkte und die Tangenten in zwei derselben; die Curve zu construiren mittelst projectivischer Strahlenbüschel (pag. 58—60).

13. Von einem Büschel II. Ordnung sind gegeben fünf Strahlen, oder vier Strahlen und der Berührungspunkt in einem derselben, oder drei Strahlen und die Berührungspunkte in zwei derselben; den Büschel zu construiren mittelst projectivischer gerader Gebilde (pag. 58—60).

14. Die drei Aufgaben 12. mit Hülfe des Pascal'schen Satzes zu lösen, und namentlich:

- a. auf beliebigen Geraden, welche durch je einen schon bekannten Curvenpunkt hindurchgehen, jedesmal den zweiten Curvenpunkt zu bestimmen;

- b. an jedem gegebenen oder bereits construirten Punkte der Curve II. Ordnung die Tangente zu zeichnen (pag. 66 und 67).

15. Die drei Aufgaben 13. mit Hülfe des Lehrsatzes von Brianchon zu lösen, und namentlich:

- a. durch beliebige Punkte, welche auf je einem schon bekannten Strahle liegen, jedesmal den zweiten Strahl des Büschels II. Ordnung zu ziehen;
 b. in jedem gegebenen oder bereits construirten Strahle des Büschels den Berührungspunkt zu bestimmen (pag. 66 und 67).

Anmerkung. Die Aufgaben 14. und 15. enthalten nicht nur eine grosse Zahl besonderer Aufgaben, sondern jede derselben lässt sich ausserdem auf verschiedene Arten lösen, indem man die Sätze über das Sechseck in der Curve oder im Büschel II. Ordnung oder diejenigen über das Fünfeck, Viereck oder Dreieck benutzen kann. Als specielle Fälle der Aufgaben 14. und 15. nennen wir folgende drei:

16. Eine Hyperbel zu construiren, von welcher ausser den beiden Asymptoten noch entweder ein Punkt oder eine Tangente gegeben ist.

17. Eine Parabel zu construiren, von welcher gegeben sind entweder vier Tangenten, oder drei Tangenten und der Berührungspunkt von einer derselben, oder zwei Tangenten nebst deren Berührungspunkten.

18. Eine Hyperbel zu construiren, von welcher die Richtungen der beiden Asymptoten und drei Punkte gegeben sind.

Wie ordnen sich diese drei Aufgaben den Aufgaben 14 und 15 unter?

19. Wenn ein gerades Gebilde u und ein Strahlenbüschel S in einer Ebene liegen und auf einander projectivisch bezogen sind, und man aus jedem Punkte von u auf den entsprechenden Strahl von S eine Senkrechte fällt, so umhüllen diese Senkrechten eine Parabel, falls sie nicht durch einen und denselben Punkt gehen (vergl. pag. 76). Die Parabel wird auch von u berührt.

20. Von einem Dreieck ASA_1 sind die Spitze S und der Winkel α an derselben gegeben, sowie zwei Gerade u und u_1 , auf welchen die Endpunkte A und A_1 der Grundlinie liegen sollen. Zeichnet man dann das Dreieck in allen möglichen Lagen, so umhüllt die Grundlinie $\overline{AA_1}$ eine Curve II. Ordnung, welche auch von u und u_1 berührt wird. (Nach pag. 136 ist S ein Brennpunkt dieser Curve.)

21. Die Grundlinie AA_1 eines veränderlichen Dreiecks APA_1 sei der Grösse nach gegeben und gleite auf einer festen Geraden u hin, während die anderen beiden Seiten $\overline{PA}$ und $\overline{PA_1}$ sich um zwei feste Punkte S und S_1 drehen; dann beschreibt die Spitze P eine Hyperbel, welche auch durch S und S_1 hindurchgeht, und von welcher die Gerade u eine Asymptote ist.

22. Drehen sich zwei Winkel ab und a_1b_1 von gegebener Grösse in einer Ebene dergestalt um ihre festen Scheitelpunkte S und S_1 , dass der Schnittpunkt $a a_1$ von zwei ihrer Schenkel ein gerades Gebilde beschreibt, so bewegt sich jeder der übrigen drei Schnittpunkte $b b_1$, $a b_1$, $a_1 b$ ihrer Schenkel auf einer durch S und S_1 gehenden Curve II. Ordnung.

23. Seien gegeben eine Gerade a und ausserhalb derselben ein Punkt P . Fällt man sodann aus P eine Normale auf jede durch a gelegte Ebene, so liegen die Fusspunkte aller dieser Normalen auf einem durch P gehenden Kreise, dessen Ebene senkrecht steht auf a und das von P auf a gefällte Perpendikel zum Durchmesser hat. — Daraus folgt:

24. Sind zwei sich schneidende Gerade a und a_1 gegeben, die nicht zu einander rechtwinklig sind, und construirt man zu jeder durch a gelegten Ebene eine durch a_1 gehende normale Ebene, so schneiden sich alle solche Ebenenpaare in den Strahlen einer durch a und a_1 gehenden Kegelfläche II. Ordnung. Jede zu a oder a_1 senkrechte Ebene schneidet die Kegelfläche in einem Kreise; jede andere zur Ebene $\overline{a a_1}$ senkrechte Ebene schneidet die Kegelfläche in einer Curve II. Ordnung, von welcher eine Axe in $\overline{a a_1}$ liegt.

25. Die im letzten Satze genannte Kegelfläche II. Ordnung erhält man auch wie folgt mit Hülfe einer Ebene α , welche im Punkte $a a_1$ auf a_1 senkrecht steht. Man lasse einen rechten Winkel sich so bewegen, dass sein Scheitelpunkt unveränderlich im Punkte $a a_1$ bleibe, dass seine Ebene stets durch die Gerade a hindurchgeht und der eine Schenkel die Ebene α beschreibt; dann muss der zweite Schenkel jene Kegelfläche II. Ordnung beschreiben.

26. Wenn zwei concentrische Strahlenbüschel, deren Ebenen sich unter schiefen Winkeln schneiden, so auf einander bezogen werden, dass je zwei einander entsprechende Strahlen auf einander senkrecht stehen, so umhüllen die Ebenen dieser Strahlenpaare eine Kegelfläche II. Ordnung, welche auch von den Ebenen

der beiden Strahlenbüschel berührt wird. — Oder: Wenn ein rechter Winkel sich so um seinen festen Scheitel dreht, dass seine beiden Schenkel in zwei festen Ebenen sich bewegen, so beschreibt seine Ebene einen Ebenenbüschel II. Ordnung, welchem auch die beiden festen Ebenen angehören.

27. Werden aus einem beliebigen Punkte Normalen gefällt auf die sämtlichen Berührungs-Ebenen einer Kegelfläche II. Ordnung, so erfüllen dieselben eine neue Kegelfläche II. Ordnung. Nämlich die Berührungs-Ebenen der ersten Kegelfläche werden durch zwei projectivische Strahlenbüschel erzeugt, und aus diesen können sofort zwei projectivische Ebenenbüschel I. Ordnung abgeleitet werden, welche die zweite Kegelfläche erzeugen.

Pol und Polare; Durchmesser der Curven zweiter Ordnung.

✓ 28. Zu einer gegebenen Figur die Polarfigur zu zeichnen in Bezug auf eine beliebige Curve II. Ordnung, d. h. zu jedem Punkte der gegebenen Figur die Polare und zu jeder Geraden den Pol zu construiren (pag. 79). Beispiel: ein Dreieck.

✓ 29. An eine gegebene Curve II. Ordnung aus einem beliebigen Punkte Tangenten zu ziehen ohne Benutzung des Cirkels (pag. 79).

30. Bewegen sich zwei veränderliche Tangenten einer Curve II. Ordnung so, dass die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte stets eine beliebige zweite Curve II. Ordnung berührt, so beschreibt ihr Schnittpunkt eine dritte Curve II. Ordnung.

dass ihr Schnittpunkt eine zweite Curve II. Ordnung durchläuft, so berührt die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte stets eine dritte Curve II. Ordnung (pag. 83).

31. Durch lineare Constructionen die Polare eines Punktes oder den Pol einer Geraden hinsichtlich einer Curve II. Ordnung zu bestimmen, welche durch fünf Bedingungen, z. B. durch fünf Punkte oder fünf Tangenten, gegeben ist, aber nicht gezeichnet vorliegt. (Vergl. die Aufgaben 14 und 15.)

32. Sind in einer Ebene zwei Curven II. Ordnung gegeben, so hat jeder Punkt A der Ebene in Bezug auf jede dieser Curven eine Polare, und man kann ihm denjenigen Punkt A_1 zuordnen, welchen diese Polaren mit einander gemein haben. Die beiden Polaren von A_1 gehen alsdann durch A , und überhaupt sind je

zwei einander zugeordnete Punkte A, A_1 einander conjugirt hinsichtlich jeder der beiden Curven II. Ordnung. Ebenso kann man je zwei Strahlen der Ebene einander zuordnen, welche in Bezug auf beide Curven II. Ordnung einander conjugirt sind. Ich behaupte nun (pag. 83):

Den Punkten einer beliebigen Geraden sind die sämmtlichen Punkte einer Curve II. Ordnung zugeordnet. Alle solche Curven II. Ordnung, welche den Geraden der Ebene zugeordnet sind, haben mindestens einen Punkt und höchstens drei Punkte U, V, W mit einander gemein; und die beiden Polaren jedes solchengemeinschaftlichen Punktes fallen auf einander, so dass dem Punkte die sämmtlichen Punkte einer Geraden zugeordnet sind.

Sind die gegebenen beiden Curven II. Ordnung einem Viereck umschrieben, so schneiden sich in den Punkten U, V, W die drei Paar Gegenseiten dieses Vierecks, und die Strahlen u, v, w sind die Seiten des Dreiecks UVW .

Die hier und in den folgenden drei Nr. betrachteten Verwandtschaften gehören zu den geometrischen Verwandtschaften des zweiten Grades, welche im 13. Vortrage der zweiten Abtheilung eingehend untersucht werden.

33. Ist in einer Ebene eine Curve k II. Ordnung gegeben, so können je zwei Strahlen der Ebene einander zugeordnet werden, welche auf einander senkrecht stehen und zugleich einander conjugirt sind hinsichtlich der Curve k . Den sämmtlichen Strahlen eines eigentlichen Punktes S , der auf keiner Axe der Curve liegt (pag. 130), sind dann die sämmtlichen Tangenten einer Parabel zugeordnet (nach Nr. 19), welche auch von der Polare des Punktes S und von den Axen der Curve k berührt wird. Von jeder gemeinschaftlichen Tangente der Parabel und der Curve k wird die letztere in dem Fusspunkte einer Normalen berührt, die vom Punkte S an k gezogen werden kann. Da höchstens vier solche gemeinschaftliche Tangenten existiren (pag. 64), so können von keinem

Den Strahlen eines beliebigen Punktes sind die sämmtlichen Tangenten einer Curve II. Ordnung zugeordnet. Alle solche Curven II. Ordnung, deren Tangenten den Strahlen je eines Punktes zugeordnet sind, haben mindestens eine Tangente und höchstens drei Tangenten u, v, w mit einander gemein; und die beiden Pole von jeder solchen gemeinschaftlichen Tangente fallen zusammen, so dass der Tangente die sämmtlichen Strahlen eines Punktes zugeordnet sind.

Punkte S mehr als vier Normalen an eine beliebige Curve k II. Ordnung gezogen werden.

34. Wird in einem Strahlenbündel eine Kegelfläche K II. Ordnung und ein bestimmter Strahl u angenommen, so können je zwei andere Strahlen a und a_1 einander zugeordnet werden, welche mit u in einer Ebene liegen und einander conjugirt sind hinsichtlich der Kegelfläche II. Ordnung. Beschreibt dann a einen Strahlenbüschel, so beschreibt gleichzeitig a_1 eine Kegelfläche II. Ordnung, welche mit der gegebenen K jeden in der Polar-Ebene von u und in jenem Strahlenbüschel liegenden Strahl von K gemein hat, und ausserdem durch u und durch denjenigen Strahl hindurchgeht, von welchem die Ebene des Strahlenbüschels die Polar-Ebene ist. (Vergl. pag. 85.) Wie lautet zu diesem Satze der reciproke?

35. Wird im Strahlenbündel eine Kegelfläche II. Ordnung angenommen, so können je zwei Strahlen des Bündels einander zugeordnet werden, welche hinsichtlich der Kegelfläche einander conjugirt sind und zugleich auf einander senkrecht stehen. Den sämtlichen Strahlen eines Strahlenbüschels sind dann die sämtlichen Strahlen einer Kegelfläche II. Ordnung zugeordnet (vergl. Nr. 24 und 25); diese Kegelfläche enthält auch die Normale und den Polarstrahl derjenigen Ebene, in welcher der Strahlenbüschel liegt. Alle solche Kegelflächen II. Ordnung schneiden sich in drei Strahlen, welche auf einander senkrecht stehen und paarweise einander conjugirt sind, so dass jeder dieser drei Strahlen auf der Ebene der beiden anderen senkrecht steht und dieselbe zur Polar-Ebene hat. Diese drei Strahlen heissen Haupt-Axen der gegebenen Kegelfläche II. Ordnung.

36. In einer gegebenen Curve II. Ordnung ist eine Sehne so zu ziehen, dass sie in einem gegebenen Punkte P halbt wird.

37. Eine Curve II. Ordnung sei gegeben durch fünf Bedingungen, z. B. durch fünf Punkte, oder durch vier Tangenten und den Berührungspunkt von einer derselben u. s. w. Man construiren beliebig viele Durchmesser und den Mittelpunkt der Curve (mit Hülfe von Nr. 14 und 15; vergl. Nr. 31).

38. Von einer Ellipse oder Hyperbel sind gegeben zwei Paar conjugirter Durchmesser und entweder ein Punkt oder eine Tangente; beliebig viele Punkte oder Tangenten der Curve zu construiren (pag. 89 und 90).

39. Von einer Curve II. Ordnung sind gegeben zwei Punkte resp. Tangenten und ein Paar conjugirter Durchmesser, oder auch

drei Punkte resp. Tangenten und der Mittelpunkt; die Curve zu construiren (pag. 89).

40. Eine Parabel zu construiren, wenn von ihr gegeben sind drei Punkte resp. Tangenten und die Richtung der Durchmesser (pag. 88 unten).

41. Eine Parabel zu construiren aus zwei Punkten oder Tangenten und der Axe.

42. Eine Parabel ist gegeben durch vier Tangenten; die Axe zu construiren.

43. Die Hyperbel zu construiren aus den Asymptoten und einem Punkte oder einer Tangente (pag. 93 und 95).

44. Von einer Curve II. Ordnung die Axen zu zeichnen (pag. 92).

45. Seien S und S_1 zwei Punkte einer Curve II. Ordnung und $\overline{SS_1}$ ein Durchmesser, seien ferner u und u_1 irgend zwei Gerade der Ebene, die zu zwei conjugirten Durchmessern der Curve beziehungsweise parallel laufen; projecirt man dann die Curve aus S und S_1 auf resp. u und u_1 , so erscheinen u und u_1 als Träger von zwei projectivisch ähnlichen geraden Gebilden, sind also proportional getheilt. Hieraus kann eine sehr einfache Construction der Ellipse oder Hyperbel abgeleitet werden.

46. Projicirt man die Parabel aus irgend einem ihrer Punkte auf einen Durchmesser u und zugleich aus ihrem unendlich fernen Punkte auf eine beliebige Gerade u_1 , so sind die geraden Gebilde u und u_1 projectivisch ähnlich auf einander bezogen. Hieraus folgt eine sehr einfache Parabelconstruction.

Regelschaaren und Regelflächen.

47. Die Mittelpunkte aller Kegelflächen II. Ordnung, welche von den sechs Seiten eines räumlichen, windschiefen Sechsecks berührt werden, erfüllen eine Regelfläche; dieselbe geht durch die drei Haupt-Diagonalen des Sechsecks (vergl. pag. 73 unten).

48. Ein gerades Gebilde u und ein Strahlenbüschel S , dessen Ebene nicht parallel zu u ist, seien projectivisch auf einander bezogen. Wird dann durch jeden Punkt von u eine Parallele zu dem entsprechenden Strahle von S gezogen, so erhalten wir die eine Regelschaar eines hyperbolischen Paraboloides (vergl. pag. 76).

49. Ein gerades Gebilde u und ein Ebenenbüschel u_1 seien

projectivisch, und ihre Träger nicht rechtwinklig zu einander. Dann bilden die sämtlichen Normalen, welche von den Punkten des geraden Gebildes u auf die ihnen resp. entsprechenden Ebenen des Büschels u_1 gefällt werden können, die eine Regelschaar eines hyperbolischen Paraboloides (folgt aus Nr. 48).

50. Werden auf einer Regelfläche in den sämtlichen Punkten eines in ihr liegenden Strahles Normalen errichtet, so bilden dieselben eine Regelschaar von einem hyperbolischen Paraboloid (folgt aus Nr. 49; vergl. pag. 98 und 99).

51. Werden durch einen beliebigen Punkt zu den sämtlichen Strahlen einer Regelschaar Normal-Ebenen gelegt, so bilden dieselben einen Ebenenbüschel I. oder II. Ordnung, je nachdem die Regelschaar einem hyperbolischen Paraboloid oder einem einfachen Hyperboloid angehört (pag. 102).

52. Alle Ebenen, welche durch einen festen Punkt gehen und ein gegebenes einfaches Hyperboloid in einer Parabel schneiden, umhüllen eine Kegelfläche II. Ordnung, welche dem Asymptotenkegel parallel ist.

53. Eine Regelfläche zu construiren, von welcher gegeben sind zwei Strahlen a, b , die sich nicht schneiden, und entweder drei beliebige, ausserhalb a und b liegende Punkte, oder drei beliebige, nicht durch a oder b gehende Berührungs-Ebenen.

Projectivische und involutorische Elementar-Gebilde.

54. In einem Elementar-Gebilde II. Ordnung zu drei gegebenen Elementen das vierte harmonische zu construiren, z. B. in einer Curve II. Ordnung zu drei Punkten den vierten harmonischen.

55. Zwei Curven k und k_1 II. Ordnung, die in derselben Ebene liegen, sind projectivisch so auf einander zu beziehen, dass den Punkten A, B, C von k (Fig. 17) die resp. Punkte A_1, B_1, C_1 von k_1 entsprechen. Zu einem beliebigen Punkte D von k ist der entsprechende Punkt D_1 von k_1 zu zeichnen. — Construction: Man bestimme in resp. k und k_1 zwei Punkte S und T_1 so, dass $\overline{ST_1}$ mit der Verbindungslinie von zwei homologen Curvenpunkten A und A_1 zusammenfällt, und projicire k aus S und k_1 aus T_1 durch zwei (projectivische) Strahlenbüschel. Letztere haben perspectivische Lage und erzeugen ein gerades Gebilde u , so dass $\overline{SD}$ und $\overline{T_1 D_1}$ auf u sich schneiden.

56. Ein Strahlenbüschel I. und ein Büschel II. Ordnung liegen in einer Ebene und sind projectivisch auf einander bezogen. Die Curve III. Ordnung zu zeichnen, auf welcher die Schnittpunkte von je zwei einander entsprechenden Strahlen der Büschel liegen (pag. 108 und 109).

57. Die zu Nr. 56 reciproke Aufgabe betrifft einen Strahlenbüschel III. Ordnung, welcher zu zeichnen ist.

58. Die Curve IV. Ordnung zu zeichnen, welche zwei projectivische Strahlenbüschel II. Ordnung mit einander erzeugen (pag. 115).

59. Den Strahlenbüschel IV. Ordnung zu zeichnen, welchen zwei projectivische Curven II. Ordnung mit einander erzeugen (pag. 115).

60. Auf einer Curve II. Ordnung liegt der Scheitelpunkt S eines Winkels φ von gegebener Grösse, welcher eine Sehne $\overline{AB}$ der Curve einschliesst. Dreht sich alsdann der Winkel um S , so beschreibt die Sehne $\overline{AB}$ einen Strahlenbüschel II. Ordnung (pag. 111 unten); derselbe artet nur dann aus in einen Büschel I. Ordnung, wenn der Winkel φ ein rechter ist (pag. 129).

61. Einer Curve II. Ordnung ist ein Dreieck ABP umschrieben, dessen Grundlinie AB von gegebener Länge ist und in einer festen Tangente u der Curve liegt. Gleitet diese Grundlinie auf u fort, so beschreibt die Spitze P des Dreiecks eine neue Curve II. Ordnung (pag. 111). Insbesondere ergibt sich:

62. Wenn ein Winkel von gegebener Grösse einer Parabel umschrieben ist, und seine beiden Schenkel auf der Parabel hinrollen, so beschreibt sein Scheitelpunkt eine Curve II. Ordnung und folglich die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte einen Büschel II. Ordnung. Nur der rechte Winkel macht eine Ausnahme (Lehrsatz 65).

63. Seien gegeben eine Kegelfläche II. Ordnung und zwei sich nicht schneidende Gerade a , b , welche entweder zu zwei Strahlen der Kegelfläche parallel laufen oder auf zwei Berührungsebenen derselben senkrecht stehen. Bewegt sich dann eine dritte Gerade so, dass sie stets die Geraden a und b schneidet und beständig entweder zu irgend einem Strahle der Kegelfläche parallel läuft, oder (im zweiten Falle) zu irgend einer Berührungsebene derselben rechtwinklig ist, so beschreibt sie ein einfaches Hyperboloid (pag. 110).

64. Wird auf einer Tangente eines Kegelschnittes ein invo-

lutorisches gerades Gebilde angenommen, und zieht man aus je zwei einander zugeordneten Punkten zwei neue Tangenten an den Kegelschnitt, so treffen sich diese beiden Tangenten auf einer bestimmten Geraden (pag. 118). Insbesondere folgt:

65. Die Scheitelpunkte aller rechten Winkel, die einer Parabel umschrieben werden können, liegen auf einer Geraden; ebenso die Spitzen aller umschriebenen gleichschenkligen Dreiecke, deren Grundlinien in einer gegebenen Tangente enthalten sind.

66. Die Spitzen der sämtlichen, einer Curve II. Ordnung umschriebenen Dreiecke, deren Grundlinien in einer festen Tangente liegen und durch den Berührungspunkt A derselben halbirt werden, liegen (nach Nr. 64) in einer Geraden, nämlich in dem durch A gehenden Durchmesser der Curve. Die Geraden, welche in jedem Dreiecke die Berührungspunkte der übrigen beiden Seiten mit einander verbinden, sind zur Grundlinie parallel.

67. Von einer Ellipse oder Hyperbel sind zwei Paare conjugirter Durchmesser gegeben; zu einem beliebigen fünften Durchmesser den conjugirten zu zeichnen (pag. 119, vergl. pag. 122).

68. Drehen sich zwei Ebenen um zwei feste Gerade u , u_1 so, dass sie beständig zu irgend zwei conjugirten Durchmessern eines gegebenen Kegelschnittes parallel laufen, so beschreibt ihre Durchschnittslinie eine durch u und u_1 gehende Kegelfläche II. Ordnung oder Regelfläche, je nachdem u und u_1 sich schneiden oder nicht.

69. Die sämtlichen Sehnen eines Kegelschnitts, welche von einer beliebig gegebenen Sehne halbirt werden, umhüllen eine Parabel (vergl. pag. 76).

70. Von einem involutorischen geraden Gebilde sind zwei Punktenpaare A , A_1 und B , B_1 gegeben; mittelst des vollständigen Vierecks zu irgend einem fünften Punkte C den zugeordneten C_1 zu construiren (pag. 124), und namentlich auch den Mittelpunkt des geraden Gebildes zu bestimmen, welcher dem unendlich fernen Punkte zugeordnet ist.

71. Werden durch einen Punkt Parallelen gezogen zu den drei Paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks, so erhält man drei Paar zugeordnete Strahlen eines involutorischen Strahlenbüschels (pag. 123).

72. Wenn also zwei Paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks auf einander senkrecht stehen, so sind auch die letzten beiden Gegenseiten auf einander senkrecht (pag. 129). Oder:

die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, dem sogenannten Höhenpunkt des Dreiecks.

73. Sämmtliche Curven II. Ordnung, welche durch die Eckpunkte und den Höhenpunkt eines beliebigen Dreiecks hindurchgehen, sind gleichseitige Hyperbeln; d. h. die unendlich fernen Punkte einer jeden solchen Curve liegen in zwei zu einander senkrechten Richtungen (pag. 124, vergl. Nr. 72).

74. Einem beliebigen Viereck lässt sich (nach Nr. 73) stets eine gleichseitige Hyperbel umschreiben; dieselbe geht durch die Höhenpunkte der vier von den Eckpunkten gebildeten Dreiecke.

75. Zieht man in einer Curve II. Ordnung durch den Mittelpunkt M einer Sehne zwei beliebige Secanten, so bestimmen diese auf der Curve ein vollständiges Viereck; die übrigen zwei Paar Gegenseiten schneiden die Sehne in zwei Punktenpaaren, für welche M ebenfalls der Mittelpunkt ist (als Ordnungspunkt eines auf der Sehne liegenden involutorischen Gebildes).

Brennpunkte der Curven zweiter Ordnung.

76. Von einer Parabel den Brennpunkt F zu construiren:

- a. Der Brennpunkt F liegt auf jeder Senkrechten, welche man auf einer beliebigen Tangente in ihrem Schnittpunkte mit der Scheiteltangente errichtet.
- b. Der Brennpunkt halbirt das Stück der Axe, welches zwischen zwei conjugirten und zu einander rechtwinkligen Strahlen liegt, z. B. zwischen einer Tangente und der Normalen im Berührungspunkt.
- c. Jede Parabeltangente bildet mit einem Durchmesser denselben Winkel, wie mit der Verbindungslinie des Berührungspunktes und des Brennpunktes.

77. Von einer Ellipse oder Hyperbel die beiden Brennpunkte zu construiren:

- a. als Ordnungspunkte eines in der Hauptaxe liegenden involutorischen Gebildes (pag. 130 und 131);
- b. mittelst des Kreises, welcher aus dem Mittelpunkte der Curve zwischen den Scheitelpunkten der Hauptaxe beschrieben wird. Errichtet man in den Punkten, welche dieser Kreis mit irgend einer Tangente der Curve gemein hat, Senkrechte auf der Tangente, so schneiden diese die Hauptaxe in den beiden Brennpunkten (pag. 134);

- c. mittelst der Scheiteltangenten der Hauptaxe. Dieselben begrenzen auf jeder dritten Tangente eine Strecke PQ , welche aus den beiden Brennpunkten durch zwei rechte Winkel projecirt wird (pag. 135);
- d. mit Hülfe des Satzes, dass die Summe resp. Differenz der beiden Brennstrahlen eines Curvenpunktes constant ist (p. 134);
- e. indem man einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse in der Nebenaxe liegt und dessen Catheten von zwei conjugirten Strahlen gebildet werden, einen Kreis umschreibt. Derselbe schneidet (pag. 131) die Hauptaxe in den beiden Brennpunkten.

78. Eine Curve II. Ordnung zu construiren aus einem Brennpunkte, der zugeordneten Directrix und einem Punkte oder auch einer Tangente (pag. 132 und 133).

79. Eine Curve II. Ordnung zu construiren aus einem Brennpunkte, und entweder drei Tangenten oder zwei Tangenten und dem Berührungspunkte von einer derselben (pag. 136). In beiden Fällen sofort den zweiten Brennpunkt zu zeichnen (pag. 132).

80. Eine Curve II. Ordnung zu construiren aus beiden Brennpunkten und einem Punkte resp. einer Tangente (pag. 134 und 135).

81. Wenn eine Ellipse und eine Hyperbel confocal sind, d. h. dieselben Brennpunkte besitzen, so schneiden sie einander in ihren vier gemeinschaftlichen Punkten unter rechten Winkeln (pag. 132); d. h. jede Tangente der einen Curve in einem gemeinschaftlichen Punkte ist zugleich Normale der anderen Curve.

82. Sind von einer Curve II. Ordnung nur zwei Punkte A, B und ein Brennpunkt F gegeben, so liegt (pag. 134) der andere Brennpunkt F_1 auf einem der beiden Kegelschnitte, von welchen A und B die Brennpunkte sind und die einander in F rechtwinklig schneiden. Denn weil $AF \pm BF$ gegeben ist, so muss $AF_1 \pm BF_1$ eine constante Grösse sein.

83. Eine Curve II. Ordnung zu construiren aus einem Brennpunkte, dem Mittelpunkt und einem Punkte resp. einer Tangente (Aufgabe 80).

84. Eine Ellipse aus der Länge ihrer Axen zu construiren:
- a. auf Grund des Lehrsatzes 45;
 - b. mittelst der vier Tangenten in den Scheitelpunkten (Aufg. 12 und 13);
 - c. mit Benutzung der Brennpunkte, die aus den Axenlängen zu construiren sind.

85. Eine Parabel zu construiren, wenn gegeben sind der Brennpunkt und die Directrix (pag. 133), oder der Brennpunkt, die Axe und ein Punkt resp. eine Tangente.

86. Wenn zwei beliebige Tangenten a , b einer Parabel irgend eine dritte schneiden und die Schnittpunkte mit dem Brennpunkte verbunden werden, so bilden (nach pag. 136, weil auch die unendlich ferne Gerade eine Tangente ist) die Verbindungslinien dieselben Winkel mit einander, wie die Tangenten a und b . Der Winkel dieser beiden Tangenten ist folglich halb so gross wie derjenige, welchen die beiden Berührungspunkte am Brennpunkt bestimmen (vergl. pag. 135).

87. Jeder Kreis, welcher einem Tangentendreieck einer Parabel umschrieben ist, geht durch den Brennpunkt der Parabel (folgt aus Nr. 86 und einem bekannten Satze über das Kreisviereck).

88. Die Brennpunkte aller Parabeln, welche einem Dreieck eingeschrieben werden können, liegen auf dem, jenem Dreieck umschriebenen Kreise (zufolge Nr. 87). Wie findet man hiernach den Brennpunkt einer Parabel, von welcher vier Tangenten gegeben sind?

Aufgaben zweiten Grades

sind im vierzehnten Vortrage sehr zahlreich gegeben. Wir fügen noch folgende hinzu:

89. Einer Curve II. Ordnung soll ein einfaches n eck eingeschrieben werden, dessen Seiten der Reihe nach durch n gegebene, nicht auf der Curve liegende Punkte hindurchgehen.

Einer Curve II. Ordnung soll ein einfaches n eck umschrieben werden, dessen Eckpunkte der Reihe nach auf n gegebenen, die Curve nicht berührenden Geraden liegen.

Constructions - Aufgaben und Lehrsätze zur zweiten Abtheilung. *)

Collineare und reciproke Verwandtschaft.

— 90. Von zwei collinearen oder zwei reciproken ebenen Systemen sind zwei einander entsprechende Vierecke gegeben. Zu einem beliebigen Punkte des einen Systemes den entsprechenden Punkt resp. Strahl des anderen zu construiren, und ebenso zu einem beliebigen Strahle des einen Systemes den entsprechenden Strahl resp. Punkt des anderen (pag. 5 bis 7).

— 91. Von zwei collinearen Systemen, die perspectivisch in derselben Ebene liegen (pag. 16), sind gegeben das Centrum und die Axe der Collineation, sowie zwei einander entsprechende Punkte oder Strahlen. Zu einer beliebigen Curve des einen Systemes soll die entsprechende Curve des anderen construirt werden, und ausserdem zu der unendlich fernen Geraden des zweiten Systemes die entsprechende Gerade des ersten.

U 92. Wenn zwei collineare ebene Systeme ein gerades Gebilde u entsprechend gemein haben und das eine derselben um die Gerade u gedreht wird, so beschreibt der Punkt, in welchem die Verbindungslinien homologer Punkte der Systeme sich schneiden, einen Kreis, dessen Mittelpunkt in dem anderen System liegt und einem unendlich fernen Punkte des ersten beweglichen Systemes entspricht, und dessen Ebene auf u senkrecht steht.

93. Sind zwei collineare ebene Systeme nicht affin, so entspricht der unendlich fernen Geraden des einen allemal eine eigentliche Gerade (die sogenannte Gegenaxe) des anderen Systemes. Die beiden Parallelstrahlenbüschel, welchen diese Gegenaxen angehören, entsprechen einander; dagegen entsprechen zwei beliebigen anderen Parallelen a, b des einen Systems Σ stets zwei nicht parallele Gerade a_1, b_1 des anderen Σ_1 , weil a_1 und b_1 in einem eigentlichen Punkte der Gegenaxe von Σ_1 sich schneiden müssen. Folglich existiren in Σ_1 nur zwei zu der Gegenaxe par-

*) Die Angaben von Seiten beziehen sich auf die zweite Abtheilung des Buches.

parallele Gerade u_1 und v_1 von der Beschaffenheit, dass auf ihnen durch a_1 und b_1 Strecken von derselben Grösse begrenzt werden, wie auf den entsprechenden Geraden u und v durch die Parallelen a und b ; oder das System Σ_1 enthält nur zwei gerade Gebilde u_1 und v_1 , welche den ihnen entsprechenden geraden Gebilden u und v von Σ gleich sind. Die Geraden u_1 und v_1 haben gleichen Abstand von der Gegenaxe des Systemes Σ_1 ; ebenso halbirt die Gegenaxe von Σ den Abstand der parallelen Geraden u und v . Werden die collinearen Systeme in eine solche Lage gebracht, dass die geraden Gebilde u und u_1 (oder v und v_1) auf einander fallen, und alle ihre Punkte entsprechend gemein haben, so liegen dieselben perspectivisch. Also: Zwei collineare ebene Systeme können im Allgemeinen auf zweifache Art in perspektivische Lage gebracht werden. In Σ können auf diesem Wege sofort zwei Strahlenbüschel ermittelt werden, welche den entsprechenden Büscheln von Σ_1 gleich sind.

94. Auf zwei beliebigen Curven II. Ordnung sind je drei Punkte A, B, C und A_1, B_1, C_1 gegeben. Man soll die Curven in eine solche Lage zu einander bringen, dass sie durch eine Kegelfläche II. Ordnung mit einander verbunden werden können; und zwar soll diese Fläche die drei Geraden $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$ enthalten. Zu dem Ende beziehe man (pag. 9) zwei ebene Systeme collinear so auf einander, dass die beiden Curven und die resp. Punkte A, B, C und A_1, B_1, C_1 einander entsprechen, und verfähre sodann nach den Angaben des Satzes 93.

95. Wird ein Gegenstand mit einer durchsichtigen Flüssigkeit, etwa mit Wasser, überdeckt, so erscheint er wegen der Brechung des Lichtes anders als in freier Luft. Weil aber jede gerade Linie auch unter der Flüssigkeit als gerade Linie erscheint, und parallele Gerade allemal als parallele sich darstellen, so erscheint der Gegenstand so, als wäre er in einen ihm collinearen, oder genauer gesagt affinen (pag. 51) verwandelt. Ebenso erscheinen einem Fische alle über dem Wasser befindlichen Gegenstände affin verwandelt, z. B. eine Kugel als Ellipsoid, ein Würfel als schiefes Parallelepipedon.

96. Wenn zwei reciproke ebene Systeme Σ und Σ_1 solche Lage haben, dass ein gerades Gebilde u von Σ perspectivisch ist zu dem ihm entsprechenden Strahlenbüschel von Σ_1 , so liegt dasselbe gerade Gebilde, wenn es zu Σ_1 gerechnet wird, auch zu dem entsprechenden Strahlenbüschel von Σ perspectivisch. Wenn also

die Systeme nicht in derselben Ebene liegen, so geht jede Ebene, welche einen Punkt des einen Systemes mit der entsprechenden Geraden des anderen verbindet, durch den Mittelpunkt von einem jener beiden zu u perspectivischen Strahlenbüschel, und die beiden Systeme erzeugen somit zwei Strahlenbündel.

97. Wenn zwei reciproke Systeme Σ und Σ_1 in derselben Ebene liegen und zwar so, dass irgend ein gerades Gebilde u von Σ perspectivische Lage hat zu dem entsprechenden Strahlenbüschel U_1 von Σ_1 , so liegt im Allgemeinen noch ein zweites gerades Gebilde v von Σ perspectivisch zu dem entsprechenden Strahlenbüschel V_1 von Σ_1 . Rechnen wir alsdann dieselben geraden Gebilde u und v zu dem zweiten Systeme Σ_1 , so entsprechen ihnen im ersten Systeme Σ die resp. Strahlenbüschel V_1 und U_1 , und zwar liegt u zu V_1 und v zu U_1 perspectivisch. Der Punkt uv ist auf der Geraden $\overline{U_1 V_1}$ enthalten, und entspricht derselben in doppelter Weise. Diese besondere Lage von zwei reciproken Systemen kann benutzt werden, um auf einfache Art zu einem beliebigen Gebilde des ersten Systemes, z. B. zu einer Curve, das reciproke Gebilde im anderen Systeme zu construiren. — In besonderen Fällen können die Geraden u und v und zugleich die Punkte U_1 und V_1 sich vereinigen; alsdann entspricht jedem Punkte von u ein Strahl von U_1 in doppelter Weise.

98. Sind zwei ebene Curven reciprok, so entspricht jeder Wendetangente der einen allemal eine Spitze (ein Rückkehrpunkt) der anderen Curve. Beweis? — Die grösste Anzahl von Wendepunkten, welche eine Curve n ter Ordnung besitzen kann, ist also gleich der grössten Anzahl von Rückkehrpunkten einer Curve n ter Classe.

99. Zu den Aufgaben 90 und 91 sind analoge Aufgaben für collineare oder reciproke räumliche Systeme aufzustellen und zu lösen (pag. 21 u. 25).

100. Sind zwei collineare räumliche Systeme Σ und Σ_1 nicht affin, so entspricht der unendlich fernen Ebene des einen allemal eine eigentliche Ebene (die sogenannte Gegen-Ebene) des anderen Systemes. Zwei homologe ebene Systeme von Σ und Σ_1 sind nur dann affin (pag. 43), wenn ihre Ebenen zu den resp. Gegen-Ebenen von Σ und Σ_1 parallel laufen; ebenso entspricht einem geraden Gebilde u von Σ nur dann ein projectivisch ähnliches gerades Gebilde u_1 von Σ_1 , wenn u zu der Gegen-Ebene von Σ parallel läuft und also auch u_1 zu derjenigen von Σ_1 . Den

sämmtlichen Geraden, welche auf der Gegen-Ebene von Σ senkrecht stehen, entsprechen in Σ_1 die sämmtlichen Strahlen eines Bündels, dessen Mittelpunkt auf der Gegen-Ebene von Σ_1 liegt. Die räumlichen Systeme enthalten daher nur zwei einander entsprechende Gerade n und n_1 , von denen jede auf der Gegen-Ebene ihres Systemes senkrecht steht. Einem Rotations-Cylinder von Σ , welcher die Gerade n zur Axe hat, entspricht in Σ_1 eine eigentliche Kegelfläche II. Ordnung, welche n_1 zur Hauptaxe hat, und welche mit der Cylinderfläche eine Schnittcurve erzeugt, wenn die Geraden n und n_1 auf einander gelegt werden. Jedem geraden Gebilde v_1 von Σ_1 , dessen Träger einen Punkt jener Schnittcurve enthält und die Axe n_1 rechtwinklig schneidet, entspricht dann in Σ ein projectivisch gleiches gerades Gebilde v ; ebenso jedem geraden Gebilde, dessen Träger zu v_1 parallel läuft und von der Gegen-Ebene des Systemes Σ_1 denselben Abstand hat wie v_1 . Hieraus erkennt man, dass zwei affine ebene Systeme nicht immer gerade Gebilde enthalten, die einander entsprechen und dabei projectivisch gleich sind.

Flächen zweiter Ordnung; Polarsysteme.

101. Zwei Strahlenbündel sind reciprok auf einander bezogen; es sind die Punkte zu bestimmen, welche die von ihnen erzeugte Fläche II. Ordnung mit einer beliebig gegebenen Geraden oder Ebene gemein hat. Diese Aufgabe gehört zu denjenigen des zweiten Grades (I. Abth. pag. 139); ebenso die folgende:

102. Zu untersuchen, ob zwei gegebene reciproke Strahlenbündel ein Ellipsoid, ein Paraboloid, ein Hyperboloid oder eine Kegelfläche II. Ordnung erzeugen.

103. Eine Gerade g und ein Punkt G_1 bewegen sich mit einander in zwei festen Ebenen Σ und Σ_1 , und zwar so, dass sie beständig aus einem ausserhalb der Ebenen gegebenen Punkte S unter rechten Winkeln gesehen werden (also $\overline{Sg}$ auf $\overline{SG_1}$ senkrecht steht). Die Verbindungs-Ebene $\overline{gG_1}$ umhüllt alsdann eine Fläche II. Ordnung (pag. 26 und 37).

104. Sind ein Strahlenbündel S und ein ebenes System Σ reciprok auf einander bezogen, und legt man durch jede Gerade von Σ eine Ebene parallel zu dem entsprechenden Strahle von S und durch jeden Punkt von Σ eine Ebene parallel zu der ent-

sprechenden Ebene von S , so umhüllen alle diese Ebenen ein Paraboloid, welches auch von Σ berührt wird.

105. Sind ein Strahlenbündel S und ein ebenes System Σ col-linear auf einander bezogen, und legt man durch jeden Punkt oder Strahl von Σ eine Ebene senkrecht zu der entsprechenden Geraden oder Ebene von S , so umhüllen alle diese Ebenen (wie in 104) ein Paraboloid, welches auch von Σ berührt wird.

106. Die Berührungspunkte aller Tangenten zu bestimmen, welche aus einem beliebigen Punkte an eine gegebene Fläche II. Ordnung gezogen werden können (pag. 34; vergl. Aufg. 29).

107. Durch eine beliebige Gerade an eine gegebene Fläche II. Ordnung Berührungs-Ebenen zu legen.

108. Auf einer Fläche II. Ordnung ist ein Kegelschnitt gegeben; den Schnittpunkt derjenigen Ebenen zu bestimmen, welche in den Punkten dieses Kegelschnittes die Fläche II. Ordnung berühren.

109. Die sämtlichen Normalen einer Fläche II. Ordnung, welche auf der letzteren in den Punkten einer Curve II. Ordnung senkrecht stehen, sind parallel zu den Strahlen einer Kegelfläche II. Ordnung (Lehrsatz 27). Welche Ausnahme erleidet der Satz, wenn die Ebene der Fusspunkten-Curve eine Durchmesser-Ebene der Fläche II. Ordnung ist?

110. Sind gegeben eine Fläche F II. Ordnung und irgend ein fester Punkt U , so können je zwei Punkte des Raumes einander zugeordnet werden, welche hinsichtlich der Fläche F einander conjugirt sind und deren Verbindungslinie durch U geht. Dann sind den sämtlichen Punkten einer beliebigen Ebene φ , welche nicht durch U geht, die sämtlichen Punkte einer Fläche F_1 II. Ordnung zugeordnet. Und zwar enthält F_1 den Punkt U und den Pol der Ebene φ , und hat mit der Fläche F nur diejenigen Punkte gemein, welche auf der Ebene φ oder auf der Polar-Ebene von U enthalten sind (vergl. I. Abth. pag. 85). Rückt φ ins Unendliche, so ergiebt sich:

111. Die Halbirungspunkte aller Sehnen, welche aus einem beliebigen Punkte U an eine Fläche F II. Ordnung gezogen werden können, liegen auf einer Fläche F_1 II. Ordnung. Dieselbe geht durch U und durch den Mittelpunkt der Fläche F , und hat mit F alle ihre unendlich fernen Punkte gemein, sowie die Berührungspunkte aller Tangenten, die von U an F gezogen werden können. Auf der Fläche F_1 liegen auch die Mittelpunkte aller Curven

II. Ordnung, in welchen die Fläche F von den durch U gehenden Ebenen geschnitten wird.

112. Wie lautet zu Nr. 110 der reciproke Satz?

113. Eine Fläche II. Ordnung durch eine Ebene so zu schneiden, dass der entstehende Kegelschnitt einen gegebenen Punkt zum Mittelpunkt hat.

114. Die Ebenen aller Kegelschnitte, welche auf einer gegebenen Fläche II. Ordnung liegen und deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Geraden enthalten sind, umhüllen einen parabolischen Cylinder (vergl. Lehrs. 69). Welche Ausnahmen erleidet dieser Satz?

115. *In einem polaren Strahlenbündel S einen Strahlenbüschel so zu bestimmen, dass je zwei einander conjugirte Strahlen desselben auf einander senkrecht stehen.* — Der Bündel enthält drei sogenannte Hauptaxen a, b, c , d. h. drei Strahlen, welche paarweise einander conjugirt und auf einander rechtwinklig sind (Beweis s. pag. 42; vergl. Lehrs. 35). Und wenn je zwei Strahlen des Bündels einander zugeordnet werden, welche einander conjugirt und zugleich auf einander senkrecht sind, so sind den sämtlichen Strahlen einer Ebene die sämtlichen Strahlen einer durch a, b und c gehenden Kegelfläche II. Ordnung zugeordnet. Nur wenn die Ebene eine der drei Hauptaxen enthält, ist ihr wiederum eine Ebene zugeordnet, welche durch dieselbe Hauptaxe hindurchgeht. Construiren wir so zu jeder Ebene einer Hauptaxe die zugeordnete Ebene, so erhalten wir einen involutorischen Ebenenbüschel; und jede Ordnungsebene dieses Büschels enthält einen Strahlenbüschel von der verlangten Beschaffenheit.

Von den genannten drei involutorischen Ebenenbüscheln a, b, c besitzt nur ein einziger zwei Ordnungsebenen, so dass die Aufgabe nicht sechs, sondern nur zwei Lösungen hat. Seien nämlich ausser den drei Hauptaxen a, b, c noch irgend zwei einander zugeordnete Strahlen s, s_1 gegeben, so liegen dieselben, weil sie zu einander rechtwinklig sind, nicht in einem und demselben von den körperlichen Winkelräumen, welche durch die Ebenen $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ gebildet werden; sie trennen desshalb eine dieser drei Ebenen, etwa $\overline{bc}$ von jeder der beiden übrigen, während die letzteren ($\overline{ab}$ und $\overline{ac}$) nicht von einander getrennt sind durch s und s_1 . Da nun in jedem der drei Ebenenbüschel a, b, c die beiden nach s und s_1 und ausserdem die beiden nach den übrigen zwei Haupt-

axen gehenden Ebenen einander zugeordnet sind, so hat nur der Ebenenbüschel a zwei Ordnungs-Ebenen (I. Abth. pag. 119).

Die Aufgabe hat somit stets zwei Lösungen. Die Ebenen der gesuchten zwei Strahlenbüschel schneiden sich in einer Hauptaxe a des Bündels und bilden mit den anderen beiden Hauptaxen b und c gleiche Winkel, weil sie dieselben harmonisch trennen. Die beiden Ebenen fallen zusammen, wenn der polare Strahlenbündel mehr als drei Hauptaxen hat, oder seine Ordnungsfläche ein Rotationskegel ist. Im rechtwinkligen Strahlenbündel genügt jede Ebene der Aufgabe.

116. *Auf einer gegebenen Fläche II. Ordnung ist ein Kegelschnitt so zu construiren, dass derselbe einen beliebig angenommenen Punkt S zum Brennpunkt hat.* Damit die Aufgabe ausführbar sei, darf S nicht auf der Fläche liegen. In dem ebenen Polarsystem, dessen Ordnungscurve der gesuchte Kegelschnitt ist, müssen je zwei conjugirte Strahlen des Büschels S auf einander rechtwinklig sein. Da nun S in dem durch die Fläche II. Ordnung bestimmten räumlichen Polarsystem der Mittelpunkt eines polaren Strahlenbündels ist, so construiren wir die Ebene des gesuchten Kegelschnittes wie in der vorhergehenden Aufgabe und erhalten so im Allgemeinen zwei Lösungen.

Ist die gegebene Fläche II. Ordnung eine Kegelfläche, so können wir die Aufgabe wie folgt lösen. Wir verbinden den Punkt S mit dem Mittelpunkte der Kegelfläche durch eine Gerade u ; dann sind die Ebenen des Büschels u paarweise einander conjugirt hinsichtlich der Fläche. Die Ebene ε des gesuchten Kegelschnittes muss durch S gehen und den involutorischen Ebenenbüschel u in einem rechtwinkligen Strahlenbüschel schneiden. Solcher Schnitt-Ebenen ε giebt es keine oder zwei, je nachdem der Ebenenbüschel u Ordnungs-Ebenen besitzt oder nicht, je nachdem also der Punkt S ausserhalb oder innerhalb der Kegelfläche liegt. Die beiden Ebenen ε sind im letzteren Falle leicht zu construiren, wenn berücksichtigt wird, dass sie auf einer der beiden einander conjugirten und zugleich zu einander rechtwinkligen Ebenen des Büschels u senkrecht stehen müssen. Sie liegen symmetrisch zu der Geraden u , und fallen zusammen, wenn der Ebenenbüschel u ein rechtwinkliger ist.

117. *Eine Fläche II. Ordnung, die einen Mittelpunkt besitzt, wird von zwei Büscheln paralleler Ebenen in Kreisen geschnitten.* Die Kreis-Ebenen sind nämlich parallel zu denjenigen beiden

Durchmesser-Ebenen der Fläche, in welchen je zwei conjugirte Durchmesser auf einander senkrecht stehen (Aufg. 115). Der gleiche Satz lässt sich auch für das elliptische Paraboloid beweisen. Die Rotationsflächen II. Ordnung besitzen nur eine Schaar von Kreisen, und deren Ebenen sind senkrecht zur Rotationsaxe.

118. *Zwei collineare Strahlenbündel S und S_1 sollen in perspectivische Lage gebracht werden.* — Zwei perspectische Bündel erzeugen ein ebenes System, und diejenigen beiden Strahlenbüschel der Bündel, durch welche das unendlich ferne gerade Gebilde des Systemes erzeugt wird, sind offenbar projectivisch gleich. Wir suchen demnach zunächst in den gegebenen Bündeln S und S_1 zwei einander entsprechende Strahlenbüschel, welche projectivisch gleich sind.

Zu dem Ende ordnen wir im Bündel S jedem Strahle die zu ihm senkrechte Ebene zu, betrachten also S als einen rechtwinkligen polaren Strahlenbündel. Dadurch wird zugleich im Bündel S_1 jedem Strahle eine Ebene zugeordnet, so dass auch S_1 ein polarer Strahlenbündel wird. In diesem suchen wir (nach Nr. 115) diejenigen beiden Strahlenbüschel, in denen je zwei einander conjugirte Strahlen auf einander senkrecht stehen. Seien a_1, a'_1 zwei solche Strahlen von einem dieser Büschel, und b_1, b'_1 die Halbierungslinien der von a_1 und a'_1 gebildeten rechten Winkel; dann entsprechen den vier harmonischen Strahlen a_1, b_1, a'_1, b'_1 von S_1 vier harmonische Strahlen a, b, a', b' von S , und weil a zu a' und b zu b' senkrecht sein muss, so halbiren b und b' die Winkel zwischen a und a' . Daraus folgt, dass die homologen Strahlenbüschel $S (a, b, a', b')$ und $S_1 (a_1, b_1, a'_1, b'_1)$ der collinearen Bündel projectivisch gleich sind, indem sie so auf einander gelegt werden können, dass die vier Strahlen a, b, a', b' mit ihren resp. entsprechenden a_1, b_1, a'_1, b'_1 zusammenfallen. Bei dieser Lage der beiden Strahlenbüschel sind die Bündel S und S_1 concentrisch perspectivisch und haben auch noch einen Ebenenbüschel entsprechend gemein (pag. 16). Verschieben wir die Bündel so gegen einander, dass sie nicht aufhören, den Ebenenbüschel entsprechend gemein zu haben, so kommen sie in die gewöhnliche perspectivische Lage und sind Scheine eines ebenen Systemes. Die Aufgabe kann also auf zweifache Art gelöst werden.

119. *In einem polaren Strahlenbündel giebt es zwei sogenannte Focalstrahlen f und f_1 . Jeder derselben ist die Axe eines Ebenenbüschels, in welchem je zwei einander conjugirte Ebenen zu einander*

rechtwinklig sind. Um sie zu construiren, suchen wir zunächst die drei Symmetrie-Ebenen α, β, γ des Bündels, welche die drei Haupttaxen mit einander verbinden. Sei a die Hauptaxe $\beta\gamma$, welche die Ebene α zur Polare hat; sei ferner s ein beliebiger in α liegender Strahl des Bündels und σ eine durch s gehende Ebene. Dann giebt es eine zu σ conjugirte und zugleich auf σ senkrechte Ebene σ_1 , welche von α in einem Strahle s_1 geschnitten werden möge. Und jede Ebene von s ist der zu ihr normalen Ebene von s_1 conjugirt, weil zu den drei Ebenen α, sa und σ von s die resp. drei conjugirten Ebenen $s_1 a, \alpha$ und σ_1 von s_1 senkrecht stehen.

Eine zweite Symmetrie-Ebene β des Bündels wird von den projectivischen Ebenenbüscheln s und s_1 in zwei project. Strahlenbüscheln geschnitten, welche involutorische Lage haben, indem je zwei einander zugeordnete Strahlen derselben in der gleichen Beziehung zu einander stehen, wie s und s_1 . Entweder nun enthält der involutorische Büschel β zwei Ordnungsstrahlen f und f_1 oder es giebt im Bündel zwei Gerade f und f_1 , aus welchen jener Büschel durch zwei rechtwinklige Ebenenbüschel projecirt wird; und in jedem Falle sind f und f_1 die gesuchten Focalstrahlen. — Mehr als zwei Focalstrahlen kann ein polarer Strahlenbündel, welcher kein rechtwinkliger ist, nicht haben, wie aus dem Vorhergehenden und daraus leicht zu erkennen ist, dass die Verbindungs-Ebene von je zwei Focalstrahlen eine Symmetrie-Ebene des Bündels sein muss. Hat der Strahlenbündel mehr als drei Hauptaxen, so fallen die beiden Focalstrahlen mit der Rotations-Axe zusammen.

Besitzt der polare Strahlenbündel eine Ordnungsfläche, so liegen die Focalstrahlen innerhalb dieser Kegelfläche II. Ordnung. Jede Ebene, welche zu einem Focalstrahle senkrecht steht, schneidet die Kegelfläche in einer Curve II. Ordnung, von welcher ein Brennpunkt in dem Focalstrahle liegt.

120. Je zwei zu einander senkrechte Ebenen, welche hinsichtlich einer Kegelfläche II. Ordnung einander conjugirt sind, werden durch die beiden Focalstrahlen der Kegelfläche harmonisch von einander getrennt (Nr. 119). Desshalb bildet jede Berührungsebene der Kegelfläche gleiche Winkel mit denjenigen beiden Ebenen, welche den Berührungsstrahl mit den beiden Focalstrahlen verbinden. Wird die Schnittlinie von zwei Berührungs-Ebenen der Kegelfläche verbunden mit den Focalstrahlen, so bildet die eine Verbindungs-Ebene mit der einen Berührungs-Ebene den-

selben Winkel, wie die andere mit der anderen. Zwei projectivische, concentrische Strahlenbüschel, durch welche die Berührungs-Ebenen einer Kegelfläche II. Ordnung erzeugt werden, werden aus jedem Focalstrahl der Fläche durch zwei gleiche, einstimmig projectivische Ebenenbüschel projecirt. Ueberhaupt spielen die Focalstrahlen bei den Kegelflächen II. Ordnung ganz dieselbe Rolle, wie die Brennpunkte bei den Curven II. Ordnung.

121. *Liegt der Mittelpunkt S eines polaren Strahlenbündels auf einer Fläche F II. Ordnung, so geht die Verbindungs-Ebene solcher drei Punkte A, B, C von F , welcher aus dem Punkte S durch drei einander conjugirte Strahlen des polaren Bündels projecirt werden, durch einen festen Punkt^{*)}.* Nämlich zu einem gegebenen Strahle $\overline{SA}$ können unendlich viele Strahlenpaare $\overline{SB}$ und $\overline{SC}$ construirt werden, welche in dem polaren Bündel nicht nur dem Strahle $\overline{SA}$, sondern auch einander conjugirt sind. Diese Strahlenpaare liegen in der Polar-Ebene von $\overline{SA}$ und bilden einen involutorischen Strahlenbüschel; sie schneiden die Fläche F in je zwei einander zugeordneten Punkten B, C eines involutorischen Kegelschnittes, und folglich gehen die Verbindungslinien $\overline{BC}$ durch einen und denselben Punkt A_1 und die Ebenen $\overline{ABC}$ durch eine Gerade $\overline{AA_1}$. Halten wir irgend einen zu $\overline{SA}$ conjugirten Strahl $\overline{SB}$ fest und ändern sodann die Lage der Punkte A und C , so dreht sich die Ebene $\overline{ABC}$ um eine Gerade $\overline{BB_1}$, die ebenso gefunden werden kann wie vorhin $\overline{AA_1}$; und diese Gerade $\overline{BB_1}$ liegt mit $\overline{AA_1}$ in der anfänglich angenommenen Ebene $\overline{ABC}$, wird also von $\overline{AA_1}$ geschnitten. Nun wird aber jede solche Gerade $\overline{AA_1}$ oder $\overline{BB_1}$ auch von demjenigen Strahle t des Bündels S geschnitten, dessen Polar-Ebene die Fläche F im Punkte S berührt. Denn halten wir z. B. A fest und nehmen wir den Punkt B in der Ebene $\overline{At}$ an, so fällt $\overline{SC}$ in jene Berührungsebene hinein und der Punkt C vereinigt sich mit S ; die Ebene $\overline{ABC}$, in welcher auch $\overline{AA_1}$ liegt, fällt also mit $\overline{At}$ zusammen, oder $\overline{AA_1}$ und t liegen in einer Ebene. Seien nun A und A' zwei ganz beliebige Punkte der Fläche F , und sei $\overline{SB}$ derjenige Strahl des polaren Bündels S , welcher die Ebene $\overline{SAA'}$ zur Polare hat; sei ferner $\overline{A'A'_1}$ die zu $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$ analoge Gerade des Punktes A' . Dann müssen $\overline{AA_1}$ und $\overline{A'A'_1}$ jede der Geraden

^{*)} Der hier folgende Beweis dieses Steiner'schen Satzes ist von Herrn Schröter (in dem Journal für Mathematik Bd. 64 pag. 70) gegeben worden.

$\overline{BB_1}$ und t schneiden; und da die letzteren in einer Ebene liegen, welche im Allgemeinen nicht durch die beliebig gewählten Punkte A und A' hindurchgeht, so müssen $\overline{AA_1}$ und $\overline{A'A'_1}$ den Schnittpunkt von $\overline{BB_1}$ und t mit einander gemein haben. Die Ebene $\overline{ABC}$ geht also stets durch einen bestimmten auf t liegenden Punkt, der seine Lage nicht ändert, wenn auch der anfänglich gewählte Punkt A mit irgend einem anderen Punkte A' der Fläche II. Ordnung vertauscht wird. — Wie lautet der reciproke Satz?

122. Ist S irgend ein Punkt einer Fläche F II. Ordnung, so geht die Verbindungs-Ebene solcher drei Punkte von F , welche aus S durch drei zu einander rechtwinklige Gerade projecirt werden, durch einen festen Punkt. Derselbe liegt auf der in S errichteten Normalen der Fläche F (Lehrs. 121).

123. Die sämtlichen Punkte, in denen je drei Berührungsebenen eines Paraboloides sich rechtwinklig schneiden, liegen in einer Ebene (folgt aus dem zu Nr. 121 reciproken Satze).

124. *Durch die Eckpunkte von irgend zwei Polardreiecken ABC und $A'B'C'$ eines ebenen Polarsystemes kann allemal ein Kegelschnitt gelegt werden.* Denn verbinden wir die fünf Punkte A, B, C, A', B' mit einem beliebigen, ausserhalb der Ebene $\overline{ABC}$ gelegenen Punkte S durch eine Fläche II. Ordnung, und ist C'' der Punkt, in welchem diese Fläche zum zweiten Male von $\overline{SC'}$ geschnitten wird, so haben (Lehrs. 121) die Ebenen $\overline{ABC}$ und $\overline{A'B'C''}$ ausser der Geraden $A'B'$ noch denjenigen Punkt des Polarsystems mit einander gemein, dessen Polare aus dem Punkte S durch eine Berührungsebene der Fläche II. Ordnung projecirt wird. Wählt man also diese Fläche so, dass ihre Berührungsebene im Punkte S nicht durch C' hindurchgeht, so fallen die Ebenen $\overline{ABC}$ und $\overline{A'B'C''}$ zusammen und C'' ist identisch mit C' , so dass die Fläche II. Ordnung beiden Polardreiecken umschrieben ist.

125. Zu beweisen, dass zwei Polardreiecke eines ebenen Polarsystems allemal ein Kegelschnitt eingeschrieben werden kann.

126. Denkt man sich im Raume irgend zwei rechtwinklige Coordinaten-Systeme mit einem und demselben Anfangspunkte, so liegen die sechs Coordinatenachsen allemal in irgend einer Kegelfläche II. Ordnung (Lehrs. 124), und die sechs Coordinaten-Ebenen berühren irgend eine Kegelfläche II. Ordnung (Lehrs. 125).

Raumcurven dritter Ordnung und geometrische Verwandtschaften zweiten Grades.

127. Ein veränderliches windschiefes Viereck bewege sich so, dass seine vier Seiten a, a_1, a_2, a_3 sich um die resp. festen Punkte S, S_1, S_2, S_3 drehen, und dass drei Eckpunkte aa_1, a_1a_2 und a_2a_3 in den resp. festen Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ fortgleiten. Dann beschreibt der vierte Eckpunkt aa_3 eine durch S und S_3 gehende Raumcurve III. Ordnung (pag. 69 und 70), die drei ersten Eckpunkte aber beschreiben drei Kegelschnitte, und alle vier Curven gehen durch den Schnittpunkt der drei Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Der Satz erleidet Ausnahmen, wenn die vier Punkte S, S_1, S_2, S_3 in einer Ebene liegen, oder wenn die drei Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ in einer Geraden sich schneiden. Wie lautet der analoge Satz für ein veränderliches neck im Raume?

128. Drei beliebige Ebenenbüschel u, u_1, u_2 seien so auf einander bezogen, dass jede Ebene von u auf den entsprechenden beiden Ebenen von u_1 und u_2 senkrecht steht. Dann liegen die Schnittpunkte von je drei homologen Ebenen der Büschel auf einer Raumcurve III. Ordnung, von welcher die Axen u, u_1, u_2 drei Secanten sind (pag. 75). Welche Ausnahme tritt ein, wenn die Axe u mit der Richtung der Axe u_1 (oder u_2) einen rechten Winkel bildet?

129. Ein gerades Gebilde u und ein Ebenenbüschel u_1 sind projectivisch auf einander bezogen, und ihre Träger sind nicht zu einander rechtwinklig. Fällt man dann aus jedem Punkte von u eine Senkrechte auf die entsprechende Ebene von u_1 , so liegen die Fusspunkte aller dieser Senkrechten auf einer Raumcurve III. Ordnung, von welcher die Geraden u und u_1 zwei Secanten sind (pag. 76; vergl. Lehrs. 49). Eine unendlich ferne, uneigentliche Secante der Raumcurve lässt sich leicht angeben; die Curve ist daher eine räumliche Ellipse.

130. Wenn die beiden Schenkel eines veränderlichen Winkels an je zwei festen aber sich nicht schneidenden Geraden hingleiten und zugleich

seine Ebene um eine feste Gerade sich dreht, so beschreibt sein Scheitelpunkt eine Raumcurve III. Ordnung, von welcher

sein Scheitelpunkt auf einer festen Geraden sich bewegt, so beschreibt seine Ebene einen Ebenenbüschel III. Ordnung, von

die fünf gegebenen Geraden | welchem die fünf gegebenen Ge-
 Secanten sind (pag. 74). | raden Axen sind.

Nur darf die fünfte feste Gerade keine der vier ersten schneiden.

131. Auf einer gegebenen Regelfläche R soll eine Raumcurve III. Ordnung construirt werden, welche durch drei auf R angenommene Punkte A, B, C hindurchgeht und eine ausserhalb der Fläche liegende Gerade g zur Secante hat. — Man beziehe den Ebenenbüschel g auf eine der beiden Regelschaaren von R projectivisch so, dass in A, B und C drei Ebenen des Büschels von den entsprechenden Strahlen der Regelschaar geschnitten werden. Dann erzeugt der Ebenenbüschel mit der Regelschaar die verlangte Raumcurve III. Ordnung (pag. 76). Die Aufgabe hat zwei Lösungen, weil jede der beiden Regelschaaren benutzt werden kann. Die Raumcurve geht auch durch jeden Punkt, welchen g mit R gemein hat, so dass sich ergibt:

132. Auf einer Regelfläche R können nur zwei Raumcurven III. Ordnung construirt werden, welche durch fünf beliebig auf R gegebene Punkte hindurchgehen. Jede Regelschaar von R besteht aus Secanten der einen Raumcurve III. Ordnung, während ihre Strahlen mit der anderen Curve nur je einen Punkt gemein haben. Welche Ausnahmen erleidet der Satz, wenn von den gegebenen fünf Punkten irgend zwei oder drei auf einem und demselben Strahle von R enthalten sind?

133. Zwei Raumcurven III. Ordnung, welche die Strahlen einer Regelschaar zu gemeinschaftlichen Secanten haben (also auch auf einer und derselben Regelfläche liegen), können höchstens vier gemeinschaftliche Punkte besitzen ohne zusammen zu fallen (folgt aus Nr. 132). Wir schliessen daraus:

134. Wenn vier projectivische Ebenenbüschel I. Ordnung beliebig im Raume liegen, so giebt es im Allgemeinen höchstens vier Punkte, in denen je vier einander entsprechende Ebenen der Büschel sich schneiden.

135. Auf Grund der Sätze 128 und 133 ist zu beweisen, dass höchstens vier Punkte existiren, aus welchen drei beliebig im Raume gegebene Gerade u, u_1, u_2 durch drei zu einander senkrechte Ebenen projecirt werden. Liegen die Geraden in einer Ebene, so giebt es entweder zwei oder keine solche Punkte.

136. Wenn zwei collineare, nicht concentrische Strahlenbündel S und S_1 eine Ebene α , nicht aber den Strahl $\overline{SS_1}$ entsprechend

gemein haben, so erfüllen die sämtlichen Punkte, in welchen je zwei homologe Strahlen der Bündel sich schneiden, eine in α liegende, durch S und S_1 gehende Curve II. Ordnung und eine Gerade g , welche von α in einem Punkte dieser Curve geschnitten wird.

137. Wenn zwei collineare, nicht concentrische Strahlenbündel S, S_1 die Gerade $\overline{SS_1}$, nicht aber jede durch $\overline{SS_1}$ gehende Ebene entsprechend gemein haben, so giebt es ausserhalb $\overline{SS_1}$ entweder keinen Punkt, in welchem zwei homologe Strahlen der Bündel sich schneiden, oder alle derartigen Punkte erfüllen eine oder zwei Gerade, die von $\overline{SS_1}$ in verschiedenen Punkten geschnitten werden.

138. Die Raumcurve III. Ordnung, welche von zwei collinearen Strahlenbündeln S und S_1 erzeugt wird, kann ausnahmsweise (Nr. 136 und 137) in eine durch S und S_1 gehende Curve II. Ordnung und eine Gerade zerfallen, welche mit der Curve II. Ordnung einen Schnittpunkt gemein hat, oder auch in die Gerade $\overline{SS_1}$ und eine oder zwei sie schneidende Gerade; sie kann sich auch auf die Gerade $\overline{SS_1}$ reduciren. Zu den Strahlen (oder Secanten), in welchen je zwei homologe Ebenen der Bündel sich schneiden, gehört aber auch in diesen besonderen Fällen jede Gerade, welche zwei Punkte der Linie III. Ordnung mit einander verbindet.

139. Mittelst collinearer Strahlenbündel eine Raumcurve III. Ordnung zu construiren, von welcher gegeben sind: a. zwei Punkte und vier Secanten, oder b. drei Punkte und drei Secanten, oder c. fünf Punkte und eine Secante.

140. Als Schnitt von zwei Kegelflächen II. Ordnung eine Raumcurve III. Ordnung zu construiren, von welcher gegeben sind: a. sechs Punkte, oder b. fünf Punkte und die Tangente von einem derselben, c. vier Punkte und die Tangenten von zwei derselben, d. drei Punkte und deren Tangenten, e. drei Punkte und die Tangenten und Schmiegungs-Ebenen von zwei derselben.

141. Als Erzeugniss von drei projectivischen Ebenenbüscheln I. Ordnung eine Raumcurve III. Ordnung zu construiren, von welcher gegeben sind: a. drei Punkte und drei Secanten, oder b. drei Punkte, die Tangente und Schmiegungs-Ebene von einem derselben und zwei Secanten.

142. Bei besonderer gegenseitiger Lage der gegebenen Stücke bieten die letzten drei Aufgaben (139 bis 141) Ausnahmen dar

oder werden unbestimmt. Sind z. B. von einer Raumcurve III. Ordnung zwei Punkte und vier Secanten gegeben, so artet die Curve aus, wenn eine der vier Secanten die drei übrigen oder auch die Verbindungslinie der beiden Punkte schneidet; die Curve wird entweder unmöglich oder unbestimmt, wenn durch einen der beiden gegebenen Punkte eine Gerade gelegt werden kann, welche drei von den vier Secanten schneidet. Für jeden Fall der Aufgaben 139 bis 141 sind die Ausnahmen anzugeben.

143. Zu den Aufgaben 139 bis 141 sind die reciproken Aufgaben für Ebenenbüschel III. Ordnung aufzustellen und zu lösen.

144. Eine Raumcurve III. Ordnung wird aus jedem ausserhalb gelegenen Punkte P durch eine Kegelfläche III. Ordnung projecirt, welche einen eigentlichen oder uneigentlichen Doppelstrahl besitzt, nämlich die durch P gehende Secante. Die Tangenten der Raumcurve bilden eine Fläche IV. Ordnung (pag. 99); folglich ist jene Kegelfläche von der vierten Classe. Jede durch P gehende Schmiegungs-Ebene der Raumcurve ist für die Kegelfläche III. Ordnung eine sogenannte Wende-Tangentenebene. Es giebt deren mindestens eine und höchstens drei, und im letzteren Falle liegen die zugehörigen drei Wendestrahlen der Kegelfläche III. Ordnung in einer Ebene (pag. 84). Liegt der Punkt P auf einer Tangente der Raumcurve III. Ordnung, so hat die Kegelfläche einen Rückkehrstrahl in dieser Tangente.

145. Nachzuweisen, dass die Sätze 32 bis 35 sich auf besondere Fälle der geometrischen Verwandtschaft zweiten Grades beziehen (pag. 102 unten). Die dort betrachteten geometrisch verwandten Strahlenbündel oder ebenen Systeme haben involutorische Lage.

146. Wenn zwei reciproke Systeme in derselben Ebene, aber nicht involutorisch liegen, so entsprechen jedem Punkte P der Ebene zwei Gerade, deren Schnittpunkt P_1 dem Punkte P zugeordnet werden möge. Beschreibt aldann P eine Gerade, so beschreibt der zugeordnete Punkt P_1 im Allgemeinen eine Curve II. Ordnung. Zwischen den Punktsystemen P und P_1 besteht eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades und sie liegen involutorisch. Zu beweisen, dass die sämtlichen Verbindungslinien $\overline{PP_1}$ von je zwei einander zugeordneten Punkten in einem Hauptpunkte sich schneiden und sich selbst zugeordnet sind.

147. Ordnet man in der Ebene eines Kreises je zwei Punkte P , P_1 einander zu, die hinsichtlich des Kreises einander conju-

girt sind und mit dem Mittelpunkte C in einer Geraden liegen, so erhält man eine involutorische Verwandtschaft zweiten Grades, welche unter dem Namen des Principes der reciproken Radien häufig angewendet wird. Da P und P_1 durch den Kreis harmonisch getrennt sind, so ist das Produkt der Strecken PC und P_1C gleich dem Quadrate des Kreisradius (I. Abth. pag. 40). Zu den Punkten $P, Q, R, \dots$ einer beliebigen Geraden g findet man die zugeordneten Punkte $P_1, Q_1, R_1, \dots$, indem man aus dem Pole G von g Senkrechte fällt auf die resp. Geraden $\overline{CP}, \overline{CQ}, \overline{CR}, \dots$; der Geraden g ist also ein Kreis zugeordnet, welcher die Gerade CG zum Durchmesser hat. Je zwei Gerade f und g der Ebene schneiden sich unter demselben Winkel, wie die ihnen zugeordneten Kreise φ und γ . Denn die Tangenten an φ und γ im Punkte C sind parallel zu resp. f und g , weil die beiden durch C gehenden Durchmesser der Kreise auch auf resp. f und g senkrecht stehen. Durch das Princip der reciproken Radien wird also die Ebene auf sich selbst abgebildet, so dass die kleinsten Theile von je zwei einander zugeordneten Figuren einander ähnlich sind. Der Mittelpunkt C ist der einzige Hauptpunkt der Ebene; die zugehörige Hauptlinie liegt unendlich fern. Statt des Kreises kann man allgemeiner ein ebenes Polarsystem annehmen, dessen Durchmesserbüschel C ein rechtwinkliger ist; das constante Produkt $PC \cdot P_1C$ braucht dann nicht nothwendig positiv zu werden. Zu einer analogen Verwandtschaft für den unendlichen Raum führt die Kugelfläche.

148. Soll zwischen zwei ebenen Systemen Σ und Σ_1 eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades aufgestellt werden, so können nicht nur irgend zwei eigentliche Dreiecke derselben als Hauptdreiecke einander zugeordnet werden (d. h. die resp. Eckpunkte derselben als Hauptpunkte), sondern es kann noch zu irgend einem Punkte A von Σ der entsprechende A_1 von Σ_1 willkürlich gewählt werden. Dadurch ist aber jedem Punkte P von Σ der entsprechende Punkt P_1 von Σ_1 zugewiesen (pag. 102 oder 104 unten).

149. Umschreibt man einem Dreiecke die sämtlichen Kegelschnitte, welche entweder eine gegebene Gerade berühren oder eine Curve II. Ordnung, die durch zwei Eckpunkte des Dreiecks geht, oder auch eine Curve III. Ordnung, welche durch zwei Punkte des Dreiecks geht und den dritten zum Doppelpunkt hat, oder endlich eine Curve IV. Ordnung, welche jeden Eckpunkt des Drei-

ecks zum Doppelpunkt hat: so werden je zwei dieser Kegelschnitte von den übrigen projectivisch geschnitten. Wird nämlich die Ebene der Kegelschnitte auf ein anderes ebenes System geometrisch bezogen, so dass die drei Hauptpunkte der Ebene mit den Eckpunkten des Dreiecks zusammenfallen, so entsprechen jenen Kegelschnitten die sämtlichen Tangenten einer Curve II. Ordnung.

150. Wenn von fünf, einem Dreieck UVW umschriebenen Kegelschnitten vier gegeben sind, und der fünfte der Bedingung genügen soll, dass die vier ersten ihn in noch vier harmonischen Punkten schneiden, so berührt er im Allgemeinen beständig eine gewisse Curve IV. Ordnung, welche auch die vier ersten Kegelschnitte berührt und die Eckpunkte des Dreiecks UVW zu Doppelpunkten hat (zufolge Nr. 149).

151. Besteht zwischen zwei ebenen Systemen Σ und Σ_1 eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades, so können diejenigen Geraden von Σ , welchen in Σ_1 eine Ellipse entspricht, leicht von den übrigen unterschieden werden, welchen eine Parabel oder eine Hyperbel entspricht. Man suche in Σ denjenigen Kegelschnitt σ , welcher der unendlich fernen Geraden s_1 von Σ_1 entspricht; einer beliebigen Geraden g von Σ entspricht alsdann in Σ_1 eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem g mit σ keinen Punkt, einen Punkt oder zwei Punkte gemein hat.

152. Jeder Curve II. Ordnung, welche dem Hauptdreieck eines ebenen Systemes Σ eingeschrieben ist, entspricht in dem geometrisch verwandten Systeme Σ_1 eine Curve IV. Ordnung, welche die drei Hauptpunkte von Σ_1 zu Rückkehrpunkten (oder Spitzen) hat. *Die Tangenten an diesen drei Rückkehrpunkten schneiden sich in einem Punkte*; denn welche drei Geraden entsprechen ihnen in Σ ?

153. Wenn eine ebene Curve n ter Ordnung mit einem Kegelschnitt im Allgemeinen und höchstens $2n$ Punkte gemein hat, so lässt sich hieraus mit Leichtigkeit der Satz beweisen: *Jeder Curve n ter Ordnung eines ebenen Systemes Σ entspricht in einem geometrisch verwandten Systeme Σ_1 eine Curve $2n$ ter Ordnung.* Geht jedoch die erste Curve ein oder mehrmals durch einen Hauptpunkt von Σ , so enthält die zweite ebenso oft die entsprechende Hauptlinie von Σ_1 , und zerfällt demnach in diese Hauptlinie und eine Curve niedrigerer Ordnung.

154. Wenn zwei geometrisch verwandte Ebenen die sämtlichen Punkte ihrer Schnittlinie entsprechend gemein haben, so

liegen auf der letzteren zwei einander zugeordnete Hauptpunkte der Ebenen (pag. 104). Die sämtlichen Verbindungslinien entsprechender Punkte werden alsdann von denjenigen beiden Geraden geschnitten, welche die übrigen beiden Paare zugeordneter Hauptpunkte mit einander verbinden. Diesen besonderen Fall der geometrischen Verwandtschaft hat Steiner (System. Entwicklung etc. pag. 251—295) mit gewohnter Meisterschaft eingehend untersucht.

Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe.

155. Die Gesamtheit L aller Leitstrahlen eines geschaart-involutorischen Systemes soll ein Strahlensystem genannt werden, oder genauer ein Strahlensystem I. Ordnung und erster Classe. Von anderen Strahlensystemen, z. B. von dem Secantensystem einer Raumcurve III. Ordnung, unterscheidet es sich dadurch, dass durch einen beliebigen Punkt des Raumes nur ein Strahl desselben hindurchgeht und in einer beliebigen Ebene auch nur ein Strahl enthalten ist. Eine Ausnahme machen nur die Punkte und Ebenen der beiden Involutionenachsen, wenn solche vorhanden sind, weil jeder Strahl, welcher beide Axen schneidet, zu dem Strahlensystem gehört. Wir wollen diese Involutionenachsen kurzweg die Axen des Strahlensystemes nennen; durch sie ist das Strahlensystem völlig bestimmt.

156. Ist Σ eine beliebige Ebene des Raumes, s der in ihr enthaltene Strahl des Strahlensystemes L , und S ein beliebiger Punkt dieses Strahles s ; dann wird durch das Strahlensystem L das ebene System Σ reciprok auf den Strahlenbündel S bezogen. Jedem Punkte P von Σ entspricht nämlich diejenige Ebene von S , welche den durch P gehenden Strahl des Systemes L projicirt; zugleich aber entspricht jeder Geraden g von Σ ein Strahl von S . Denn die Strahlen des Systemes L , welche von g geschnitten werden, bilden eine Regelschaar (pag. 114); und weil zu dieser auch der Strahl s gehört, so wird sie aus S durch einen Ebenenbüschel projicirt, dessen Axe ein Leitstrahl der Schaar ist und der Geraden g von Σ entspricht. Wenn g eine der Axen des Strahlensystemes schneidet, so muss der entsprechende Strahl des Bündels S die andere Axe schneiden, und die Strahlen von L , welche von g getroffen werden, bilden dann einen Strahlenbüschel I. Ordnung.

157. Das Strahlensystem L wird (Nr. 156) von je zwei Ebenen, welche irgend einen Strahl s des Systemes mit einander gemein haben, in zwei collinearen ebenen Systemen geschnitten; es wird aus je zwei Punkten, welche auf einem seiner Strahlen liegen, durch zwei collineare Strahlenbündel projecirt.

158. Zwischen zwei ebenen Systemen Σ und Σ_1 , welche zwei verschiedene Strahlen s und s_1 des Systemes L enthalten, wird durch dieses Strahlensystem eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades hergestellt. Projiciren wir nämlich das Strahlensystem aus zwei beliebigen Punkten des Strahles s durch zwei Strahlenbündel, so schneiden diese die Ebene Σ_1 in zwei zu Σ reciproken ebenen Systemen (Nr. 156), durch welche ebenfalls die geometrische Verwandtschaft zwischen Σ und Σ_1 hergestellt wird (pag. 102). Die Strahlen s und s_1 sind Hauptstrahlen von resp. Σ und Σ_1 ; sie werden von resp. Σ_1 und Σ in zwei einander zugeordneten Hauptpunkten geschnitten. Wenn das Strahlensystem zwei Axen besitzt, so liegen auf jeder derselben zwei einander zugeordnete Hauptpunkte von Σ und Σ_1 .

159. Das Strahlensystem L ist bestimmt durch vier seiner Strahlen, wenn von diesen weder drei sich gegenseitig schneiden, noch zwei in einer Ebene liegen, auf welcher auch die übrigen beiden sich schneiden, noch endlich alle vier zu einer und derselben Regelschaar gehören. Wenn nämlich zwei von den vier Strahlen sich schneiden, so muss ihre Ebene durch die eine Axe des Systemes gehen und ihr Schnittpunkt auf der anderen liegen (pag. 114); diese Axen können also construirt werden, weil jede derselben auch die übrigen beiden Strahlen schneiden muss. Wenn aber keine zwei von den vier Strahlen in einer Ebene liegen, so beziehe man zwei ebene Systeme, welche durch einen s dieser vier Strahlen gehen, collinear auf einander, sodass sie den Strahl s entsprechend gemein haben und von jedem der übrigen drei Strahlen in zwei homologen Punkten geschnitten werden. Diese collinearen Systeme erzeugen dann das Strahlensystem L mit einander (Nr. 157).

160. Wenn ein Punkt P einen beliebigen Kegelschnitt φ durchläuft, so beschreibt im Allgemeinen der durch P gehende Strahl des Systemes L eine geradlinige Fläche F^4 IV. Ordnung. Nämlich F^4 hat mit einer beliebigen Geraden g höchstens vier Punkte gemein, weil alle Strahlen des Systemes, welche von g getroffen werden, auf einer Regelfläche liegen, und letztere mit dem Kegelschnitt φ höchstens vier Punkte gemein hat. Die Fläche F^4

geht durch denjenigen Strahl s des Systemes, welcher mit φ in einer Ebene liegt, zweimal, wenn s und φ sich schneiden. Jede durch s gelegte Ebene schneidet die Fläche F^4 noch in einem zu φ projectivischen Kegelschnitt, und aus jedem Punkte von s werden die Strahlen von F^4 durch einen zu φ projectivischen Ebenenbüschel II. Ordnung projecirt (Nr. 156 und 157).

161. Zwei Gerade u , v , die nicht in einer Ebene liegen, können stets als Axen eines Strahlensystems betrachtet werden. Daraus und aus Nr. 160 folgt: *Gleitet eine Gerade g entlang an einem festen Kegelschnitt φ und an zwei Geraden u , v , welche letzteren weder miteinander noch mit φ in einer Ebene liegen, so beschreibt sie eine Fläche F^4 IV. Ordnung. Diese Fläche geht im Allgemeinen zweimal durch diejenige Gerade s , welche mit φ in einer Ebene liegt und die Geraden u und v schneidet. Die Erzeugenden g der Fläche F^4 werden aus jedem Punkte der Geraden s durch einen Ebenenbüschel II. Ordnung projecirt und von jeder durch s gelegten Ebene in den Punkten eines Kegelschnittes getroffen, welcher durch die Erzeugenden g projectivisch auf φ bezogen ist. Die Geraden u und v sind Doppelpunkts-Gerade der Fläche F^4 ; denn durch einen beliebigen Punkt von u z. B. gehen im Allgemeinen zwei Erzeugende g von F^4 , und zwar liegen dieselben mit v in einer Ebene.*

162. Wenn aber in Nr. 161 der Kegelschnitt φ mit der Geraden u einen Punkt U gemein hat, so zerfällt die Fläche F^4 in die Ebene $\overline{Uv}$ und eine Fläche F^3 III. Ordnung. *Die Gerade u ist eine Doppelpunkts-Gerade dieser Fläche F^3 ; letztere enthält auch die Gerade v und hat mit einer beliebig durch v gelegten Ebene im Allgemeinen zwei Erzeugende gemein, deren Schnittpunkt auf u liegt.* Das gerade Gebilde v ist durch die Erzeugenden g und den Ebenenbüschel u projectivisch auf den Kegelschnitt φ bezogen. Wir werden unten (Nr. 199) diese geradlinige Fläche III. Ordnung genauer betrachten.

163. Das Strahlensystem I. Ordnung und erster Classe kann allgemeiner, als es in Nr. 155 geschah, definirt werden als Erzeugniss von zwei collinearen ebenen Systemen, welche ihre Schnittlinie, nicht aber jeden Punkt derselben entsprechend gemein haben; die Sätze Nr. 156 und 157 gelten auch dann noch. Diese Definition führt uns zu einer speciellen Art des Strahlensystemes, welche eine einzige Axe besitzt, und auch aufgefasst werden kann als die Gesammtheit aller derjenigen Leitstrahlen eines Nullsystemes,

welche einen gegebenen Leitstrahl schneiden. Dieses Strahlensystem wird erzeugt durch zwei collineare ebene Systeme, welche ihre Schnittlinie und einen einzigen Punkt derselben entsprechend gemein haben.

164. Die sämtlichen Strahlen dieses besonderen Strahlensystemes, welche einem beliebigen Kegelschnitt φ begegnen, bilden eine Fläche IV. Ordnung mit nur einer Doppelpunkts-Geraden.

Flächenbündel zweiter Ordnung und Flächen dritter Ordnung.

165. Drei Flächen II. Ordnung, welche nicht demselben Flächenbüschel angehören, bestimmen einen Flächenbündel II. Ordnung. Nämlich jede Fläche II. Ordnung, welche mit zwei von den gegebenen in einem und demselben Flächenbüschel liegt, erzeugt mit der dritten Fläche einen neuen Flächenbüschel II. Ordnung, dessen sämtliche Flächen wir zu dem Flächenbündel rechnen. Weil die Polar-Ebenen eines Punktes hinsichtlich der Flächen eines Flächenbüschels II. Ordnung sich in einer Geraden schneiden und einen zum Flächenbüschel projectivischen Ebenenbüschel bilden, so ergibt sich:

- a) Die Polar-Ebenen eines Punktes P hinsichtlich der Flächen eines Flächenbündels schneiden sich in einem Punkte P_1 ; sie bilden einen Ebenenbündel, welcher zum Flächenbündel projectivisch ist; die Ebenenbündel, welche wir für zwei verschiedene Punkte P und Q erhalten, sind mittelst des Flächenbündels collinear auf einander bezogen.
- b) Jedem Punkte P des Raumes ist also ein bestimmter Punkt P_1 conjugirt in Bezug auf alle Flächen des Bündels.
- c) Wenn demnach irgend drei Flächen des Bündels, welche nicht demselben Flächenbüschel angehören, sich in einem Punkte A schneiden oder berühren, so ist dieser Punkt sich selbst conjugirt und liegt auf allen Flächen des Bündels.
- d) So z. B. wird ein Flächenbündel II. Ordnung gebildet von allen Flächen II. Ordnung, welche durch eine gegebene Raumcurve III. Ordnung oder auch durch sieben beliebig gegebene Punkte hindurchgehen.
- e) Durch jeden Punkt P , welchem ein anderer Punkt P_1 conjugirt ist, gehen unendlich viele Flächen des Bündels. Da dieselben im Punkte P von den Ebenen des Büschels $\overline{PP_1}$

berührt werden, so bilden sie einen Flächenbüschel II. Ordnung, und ihre Durchschnittscurve wird im Punkte P von der Geraden $\overline{PP_1}$ berührt.

- f) Zwei beliebige Punkte P, Q des Raumes können (zufolge e) im Allgemeinen nur durch eine einzige Fläche des Bündels mit einander verbunden werden,

166. *Den sämtlichen Punkten einer Ebene φ sind hinsichtlich eines Flächenbündels II. Ordnung die sämtlichen Punkte einer Fläche F^3 III. Ordnung conjugirt; auf letzterer liegen auch die Pole der Ebene φ hinsichtlich aller Flächen des Bündels.* Sucht man nämlich zu jedem Punkte von φ die Polar-Ebenen in Bezug auf irgend drei Flächen des Bündels, welche nicht demselben Flächenbüschel angehören, so erhält man drei, zu dem ebenen Systeme φ reciproke und folglich zu einander collineare Strahlenbündel, und diese erzeugen die Fläche F^3 III. Ordnung, welche auch durch die Mittelpunkte der Strahlenbündel, d. h. durch die drei Pole der Ebene φ hindurchgeht. Den sämtlichen Punkten einer auf φ liegenden Geraden sind die sämtlichen Punkte einer auf F^3 enthaltenen Raumcurve III. Ordnung conjugirt; die Raumcurven III. Ordnung, welche so den sämtlichen Geraden von φ entsprechen, bilden das erste Curvensystem der Fläche F^3 . Die Pole der Ebene φ in Bezug auf solche Flächen des Bündels, welche zusammen einen Flächenbüschel II. Ordnung ausmachen, erfüllen eine Raumcurve III. Ordnung, welche dem zweiten Curvensystem der Fläche F^3 angehört.

Die Fläche F^3 geht auch durch die Mittelpunkte M aller Kegelflächen II. Ordnung, welche in dem Flächenbündel enthalten sind. Nämlich in jedem Flächenbüschel, welchem eine solche Kegelfläche II. Ordnung angehört, sind dem Mittelpunkte M der letzteren die sämtlichen Punkte einer Ebene, statt wie gewöhnlich einer einzigen Geraden, conjugirt (vgl. pag. 131); dem Punkte M sind deshalb hinsichtlich des Flächenbündels II. Ordnung die sämtlichen Punkte einer Geraden conjugirt, und diese hat auch mit der Ebene φ einen Punkt gemein.

167. Die Mittelpunkte aller Flächen eines Flächenbündels II. Ordnung erfüllen eine Fläche III. Ordnung (Nr. 166).

168. *Die Mittelpunkte M aller Kegelflächen II. Ordnung, welche in einem Flächenbündel II. Ordnung enthalten sind, liegen auf einer Raumcurve VI. Ordnung.* Bestimmt man die beiden Flächen F^3 und G^3 III. Ordnung, deren Punkte den sämtlichen

Punkten von zwei beliebigen Ebenen φ und γ conjugirt sind hinsichtlich des Flächenbündels II. Ordnung, so haben F^3 und G^3 alle jene Mittelpunkte M mit einander gemein, ausserdem aber diejenige Raumcurve III. Ordnung, deren Punkte den Schnittpunkten von φ und γ conjugirt sind. Die Schnittlinie von F^3 und G^3 besteht aber aus einer Raumcurve IX. Ordnung (pag. 195), welche in jene Raumcurve III. Ordnung und die im Satze genannte Raumcurve VI. Ordnung zerfällt. Die letztere wird von φ in höchstens sechs Punkten geschnitten, und jedem derselben ist eine auf der Fläche F^3 liegende Gerade conjugirt.

169. Die Mittelpunkte aller Kegelflächen II. Ordnung, welche durch sieben beliebig gegebene Punkte gelegt werden können, sind auf einer Raumcurve VI. Ordnung enthalten (Nr. 168, vgl. Nr. 165 d).

170. In einem Flächenbündel II. Ordnung giebt es unendlich viele Flächen, die von einer beliebig gegebenen Ebene φ berührt werden. Die Berührungspunkte sind paarweise einander conjugirt hinsichtlich des Bündels, und liegen in einer Curve III. Ordnung. In letzterer wird die Ebene φ von der Fläche F^3 III. Ordnung geschnitten, welche die Pole von φ in Bezug auf die Flächen des Bündels enthält. — Ein Flächenbündel II. Ordnung enthält unendlich viele Paraboloid.

Flächengebüsch zweiter Ordnung und Flächen vierter Ordnung.

171. Vier Flächen II. Ordnung, welche nicht demselben Flächenbündel angehören, bestimmen ein Flächengebüsch II. Ordnung. Nämlich je zwei Flächen II. Ordnung, welche mit irgend drei von den gegebenen in einem und demselben Flächenbündel liegen, erzeugen mit der vierten gegebenen Fläche einen neuen Flächenbündel II. Ordnung, dessen sämtliche Flächen wir zu dem Flächengebüsch rechnen. Mit Hülfe von Nr. 165 ergibt sich:

- a) Wenn zwei Punkte P, P^I in Bezug auf die ersten vier Flächen einander conjugirt sind, so sind sie hinsichtlich jeder Fläche des Gebüsches einander conjugirt.
- b) Haben also die ersten vier Flächen irgend einen gemeinschaftlichen Punkt, so liegt derselbe auf jeder Fläche des Gebüsches. So z. B. wird ein Flächengebüsch gebildet von

allen Flächen II. Ordnung, die durch sechs beliebig im Raume gegebene Punkte hindurchgehen.

- c) Sucht man zu zwei beliebigen Punkten P , Q die Polar-Ebenen in Bezug auf alle Flächen des Gebüsches, so erhält man die sämtlichen Ebenen von zwei räumlichen Systemen, welche durch das Flächengebüsch collinear auf einander bezogen sind.
- d) Durch einen beliebig gegebenen Punkt gehen unendlich viele Flächen des Gebüsches; dieselben bilden einen Flächenbündel II. Ordnung.
- e) Drei beliebige Punkte des Raumes können im Allgemeinen nur durch eine einzige Fläche des Gebüsches mit einander verbunden werden (vgl. Nr. 175).

172. Beschreibt ein Punkt P irgend eine Gerade g , so beschreiben seine Polar-Ebenen in Bezug auf vier beliebige Flächen des Gebüsches vier zu einander projectivische Ebenenbüschel. Es giebt demnach (zufolge des Satzes 134) in g höchstens vier Punkte, welchen vier andere Punkte hinsichtlich aller Flächen des Gebüsches conjugirt sind; oder *diejenigen Punkte, welche einander paarweise conjugirt sind hinsichtlich des Flächengebüsches, liegen in einer Fläche K^4 IV. Ordnung.* Dieselbe wird nach Steiner die Kernfläche des Gebüsches genannt. Sie enthält auch die Mittelpunkte M aller Kegelflächen II. Ordnung, welche dem Flächengebüsch angehören. Denn in jedem Flächenbündel, welcher eine solche Kegelfläche enthält, sind dem Mittelpunkte M die sämtlichen Punkte einer Geraden conjugirt (zufolge Nr. 166); dem Punkte M muss also hinsichtlich des Flächengebüsches ein bestimmter Punkt dieser Geraden conjugirt sein. — Daraus folgt:

173. *Die Mittelpunkte aller Kegelflächen II. Ordnung, welche durch sechs beliebig gegebene Punkte gelegt werden können, sind auf einer Fläche IV. Ordnung enthalten.* Dieselbe geht offenbar durch die Raumcurve III. Ordnung, welche die sechs Punkte mit einander verbindet, ferner durch die fünfzehn Verbindungslinien der sechs Punkte, und endlich durch die zehn Geraden, in denen je eine Verbindungs-Ebene von irgend drei der gegebenen Punkte die Verbindungs-Ebene der übrigen drei Punkte schneidet.

174. Ein Flächengebüsch II. Ordnung Σ kann (nach Nr. 171 c) auf ein räumliches System Σ_1 so bezogen werden, dass jeder Fläche von Σ eine Ebene von Σ_1 entspricht und jedem Flächenbündel von Σ ein zu ihm projectivischer Ebenenbüschel von Σ_1 . Jeder

Raumcurve IV. Ordnung, in welcher zwei Flächen des Gebüsches Σ sich schneiden, entspricht dann in Σ_1 eine Gerade als Schnittlinie der zugehörigen beiden Ebenen von Σ_1 ; jeder Gruppe von acht Punkten, in welchen drei beliebige Flächen des Gebüsches Σ sich schneiden und die wir associirte Punkte nennen wollen, entspricht in Σ_1 der Schnittpunkt der entsprechenden drei Ebenen. Umgekehrt entspricht jeder Geraden von Σ_1 im Allgemeinen eine Raumcurve IV. Ordnung in Σ , und jedem Punkte von Σ_1 eine Gruppe von acht associirten Punkten in Σ ; doch sind nicht immer diese acht Punkte, die wir als Schnittpunkte von drei Flächen II. Ordnung construiren können, reell vorhanden, und dasselbe gilt von jener Raumcurve IV. Ordnung. Auch statt der Flächen des Gebüsches Σ , welche den Ebenen von Σ_1 entsprechen, können räumliche Polarsysteme auftreten, die keine reellen Ordnungsflächen besitzen.

175. Zwei Gruppen von je acht associirten Punkten eines Flächengebüsches Σ können durch eine Raumcurve IV. Ordnung verbunden werden, weil die entsprechenden beiden Punkte des räumlichen Systemes Σ_1 auf einer Geraden liegen. Ebenso sind drei Gruppen associirter Punkte allemal auf einer dem Gebüsch angehörenden Fläche II. Ordnung enthalten. Drei beliebige Punkte von Σ , von denen keine zwei einander associirt sind, können durch eine einzige Fläche des Gebüsches verbunden werden; die entsprechende Ebene von Σ_1 verbindet die zugehörigen drei Punkte von Σ_1 .

176. Jede Verbindungs-Gerade s von zwei associirten Punkten des Gebüsches Σ soll ein Hauptstrahl desselben genannt werden. Ihr entspricht in Σ_1 allemal eine Gerade s_1 , und zugleich ist sie der Träger eines involutorischen geraden Gebildes, in welchem je zwei zugeordnete Punkte einander associirt sind. Den beiden associirten Punkten von s entspricht in Σ_1 ein und derselbe Punkt P_1 , irgend einen dritten Punkt von s entspricht in Σ_1 ein Punkt Q_1 ; dem Ebenenbüschel $\overline{P_1 Q_1}$ oder s_1 von Σ_1 entspricht aber in Σ ein Flächenbüschel II. Ordnung, dessen Flächen mit s drei Punkte gemein haben und sich desshalb in der Geraden s und einer Raumcurve III. Ordnung schneiden. Folglich entspricht wirklich jedem Punkte von s ein Punkt von s_1 . Jedem Ebenenbüschel von Σ_1 , dessen Axe mit s_1 keinen Punkt gemein hat, entspricht in Σ ein Flächenbüschel II. Ordnung, welcher von s in einem involutorischen geraden Gebilde geschnitten wird (pag. 141). Je zwei zugeordnete

Punkte des letzteren sind aber einander associirt, weil sie einem und demselben Punkte von Σ_1 entsprechen. Aus dem letzten Beweise folgt zugleich der Satz: *Jede Gerade von Σ , welcher in Σ_1 wiederum eine Gerade entspricht, ist ein Hauptstrahl des Gebüsches.*

Durch jeden Punkt von Σ gehen höchstens sieben Hauptstrahlen, weil der Punkt nicht mehr als sieben associirte hat, mindestens aber ein solcher.

177. *Jeder Geraden g des Gebüsches Σ , welche keine associirten Punkte mit einander verbindet, entspricht in dem räumlichen Systeme Σ_1 ein zu g projectivischer Kegelschnitt γ_1 .* Durch die Gerade g kann nur eine Fläche des Gebüsches gelegt werden; suchen wir nämlich zu drei beliebigen Punkten A, B, C von g die entsprechenden Punkte A_1, B_1, C_1 von Σ_1 , so entspricht die Ebene $\overline{A_1 B_1 C_1}$ der genannten Fläche. Der Geraden g entspricht folglich in Σ_1 eine ebene Curve γ_1 . Seien nun a_1 und b_1 zwei Gerade, welche die Ebene $\overline{A_1 B_1 C_1}$ in den resp. Punkten A_1 und B_1 schneiden, und beziehen wir die Ebenenbüschel a_1 und b_1 so auf einander, dass in jedem dritten Punkte C_1 von γ_1 zwei einander entsprechende Ebenen derselben sich schneiden, so erzeugen diese Ebenenbüschel eine geradlinige Fläche II. Ordnung, von welcher γ_1 ein ebener Schnitt ist. Denn den Ebenenbüscheln a_1 und b_1 von Σ_1 entsprechen in Σ zwei Flächenbüschel II. Ordnung, welche durch die resp. Punkte A und B von g hindurchgehen und (pag. 141) auf das gerade Gebilde g perspectivisch, also auf einander projectivisch bezogen sind; und folglich sind auch die Ebenenbüschel a_1 und b_1 projectivisch. Dass der Kegelschnitt γ_1 nicht in zwei Gerade zerfallen kann, ergibt sich sofort aus Nr. 176.

178. *Jeder Ebene φ von Σ entspricht in Σ_1 eine Fläche F_1^4 IV. Ordnung, welche unendlich viele Kegelschnitte enthält und nach ihrem Entdecker die Steiner'sche Fläche genannt wird.* Die Fläche F_1^4 hat mit einer Geraden von Σ_1 höchstens vier Punkte gemein, weil die Raumcurve IV. Ordnung von Σ , welche der Geraden entspricht, von der Ebene φ in höchstens vier Punkten geschnitten wird. Jeder beliebigen Geraden g von φ entspricht (nach Nr. 177) auf der Fläche F_1^4 ein Kegelschnitt γ_1 . Die Ebene des letzteren begegnet aber der Fläche F_1^4 in noch einem zweiten Kegelschnitt λ_1 ; denn ihr entspricht in Σ eine geradlinige Fläche II. Ordnung, welche mit der Ebene φ die Gerade g und folglich noch eine zweite Gerade l gemein hat. Die geradlinige Fläche II. Ordnung wird im Punkte gl oder P von jeder durch P gehenden Geraden

der Ebene φ berührt; wir schliessen daraus, dass die Ebene der Kegelschnitte γ_1 und λ_1 in einem gemeinschaftlichen Punkte P_1 der letzteren von der Fläche F_1^4 berührt wird. Dem Punkte P_1 entspricht der Schnittpunkt P der Geraden g und l ; jedem anderen gemeinschaftlichen Punkte U_1 von γ_1 und λ_1 entsprechen zwei von einander verschiedene Punkte U und U' der Geraden g und l . Und da U und U' einander associirt sind, so entspricht (nach Nr. 176) ihrer Verbindungslinie $\overline{UU'}$ eine Gerade in Σ_1 , durch welche die Fläche F_1^4 zweimal hindurchgeht. Die Kegelschnitte γ_1 und λ_1 haben ausser P_1 höchstens drei Punkte U_1 mit einander gemein. *Die beliebige Ebene φ enthält also höchstens drei Hauptstrahlen $\overline{UU'}$ des Flächengebüsches Σ und mindestens einen solchen.* Die drei Hauptstrahlen bilden ein Dreieck, dessen Eckpunkte O einander associirt sein müssen, weil sonst mehr als drei solche Gerade in der Ebene φ vorkommen würden. *Die Steiner'sche Fläche F_1^4 enthält folglich höchstens drei Doppelgerade, die sich in einem dreifachen Punkte O_1 schneiden müssen, und mindestens eine solche.*

179. Betrachten wir die Steiner'sche Fläche F_1^4 genauer in dem Falle, wenn sie drei Doppelgerade u_1, v_1, w_1 besitzt. Die letzteren werden in der Ebene φ dargestellt durch drei Hauptstrahlen u, v, w , deren drei Schnittpunkte dem gemeinschaftlichen Punkte O_1 von u_1, v_1, w_1 entsprechen; nämlich jedem Punkte von u_1 z. B. entsprechen zwei associirte Punkte von u , so dass u als Träger eines involutorischen geraden Gebildes sich darstellt (Nr. 176). Jeder Geraden g von φ entspricht ein Kegelschnitt γ_1 auf F_1^4 , dessen Ebene mit F_1^4 noch einen zweiten Kegelschnitt λ_1 gemein hat; und dem letzteren entspricht in φ eine zweite Gerade l , welche mit g in einer sehr einfachen Beziehung steht. Weil nämlich γ_1 und λ_1 in drei Punkten der Doppelgeraden u_1, v_1, w_1 sich schneiden, so müssen g und l die drei Hauptstrahlen u, v und w in drei Paaren associirter Punkte treffen. Dreht sich also die Gerade g um einen ihrer Punkte P , so dass ihre Schnittpunkte mit u und v zwei perspectivische gerade Gebilde beschreiben, so bewegt sich l in einem Strahlenbüschel II. Ordnung, welchem auch die Geraden u, v und w angehören. Denjenigen beiden Strahlen dieses Büschels, welche in P sich schneiden, entsprechen in F_1^4 zwei Kegelschnitte, deren gemeinschaftliche Ebene in dem zugehörigen Punkte P_1 die Fläche F_1^4 berührt. Da nun P als beliebiger Punkt der Ebene φ und somit P_1 als beliebiger Punkt von F_1^4 anzusehen ist, so ergiebt sich: *Die Steiner'sche Fläche*

hat mit jeder ihrer Berührungs-Ebenen zwei Kegelschnitte gemein. (Ausnahmen s. Nr. 181).

180. Liegt in Nr. 179 der Drehpunkt P der Geraden g auf dem Hauptstrahle u , so dreht sich die Gerade l um den zu P associirten Punkt von u . Zwei beliebige dieser Geraden l werden nun durch den Strahlenbüschel P projectivisch auf einander bezogen; die ihnen entsprechenden Kegelschnitte λ_1 , welche durch P_1 hindurchgehen, werden folglich durch die Kegelschnitte γ_1 projectivisch auf einander bezogen. Daraus folgt: *Die Berührungs-Ebenen, welche aus einem beliebigen Punkte P_1 von einer der drei Doppelgeraden an die Steiner'sche Fläche gelegt werden können, umhüllen eine Kegelfläche II. Ordnung; ihre Berührungspunkte entsprechen den Punkten eines Kegelschnittes von φ und liegen deshalb auf einer Curve IV. Ordnung* (Nr. 191). — Jede durch eine Doppelgerade u_1 gelegte Ebene berührt die Fläche in einem Punkte von u_1 , indem sie dieselbe in u_1 und in einer durch den dreifachen Punkt gehenden Curve II. Ordnung schneidet; denn wenn die Gerade g beliebig durch vw gelegt wird, so fällt l mit u zusammen, und der Punkt gl , welchem der Berührungspunkt der Ebene $\gamma_1^{u_1}$ entspricht, liegt auf u .

181. Die beiden zusammen gehörigen Geraden g und l (Nr. 179) sind entweder durch zwei oder durch kein Paar Eckpunkte des Dreiecks uvw von einander getrennt. Im ersteren Falle hat nur eines, im letzteren jedes der involutorischen geraden Gebilde u, v, w zwei Ordnungspunkte. Verbinden wir im letzteren Falle einen Ordnungspunkt von u mit einem solchen von v durch eine Gerade a , so entspricht derselben in F_1^4 ein Kegelschnitt α_1 , und die Ebene von α_1 hat mit F_1^4 diesen Kegelschnitt doppelt gemein, d. h. sie berührt die Fläche in allen Punkten von α_1 , ohne ihr in noch einem zweiten Kegelschnitt zu begegnen. Die Gerade a trifft deshalb auch den Hauptstrahl w in einem Ordnungspunkte; und überhaupt bilden die Ordnungspunkte von u, v, w die sechs Eckpunkte eines vollständigen Vierseits, dessen Seiten vier solchen Kegelschnitten α_1 entsprechen. *Es giebt demnach höchstens vier Ebenen, welche die Steiner'sche Fläche F_1^4 in den sämtlichen Punkten von je einem Kegelschnitt berühren.* Diesen Ebenen entsprechen in dem Flächengebüsch offenbar Kegelflächen, nämlich Flächen II. Ordnung, welche mit der Ebene φ nur je eine Gerade gemein haben.

182. *Jeder ebenen Schnittcurve der Steiner'schen Fläche F_1^4 entspricht in der Ebene φ ein Kegelschnitt, welcher die Hauptstrah-*

len u, v, w in je zwei associirten Punkten schneidet; denn der Ebene jener Schnittcurve entspricht in dem Gebüsch Σ eine Fläche II. Ordnung. Den sämtlichen Schnittcurven von F_1^4 , deren Ebenen durch eine beliebige Gerade s_1 gehen, entsprechen ebenso die sämtlichen Kegelschnitte eines in φ liegenden Curvenbüschels II. Ordnung; und da höchstens drei dieser Kegelschnitte in gerade Linien zerfallen, so gehen durch die Gerade s_1 höchstens drei Berührungs-Ebenen der Steiner'schen Fläche. Also die Steiner'sche Fläche ist von der dritten Classe.

183. Eine ebene Schnittcurve k_1^4 der Steiner'schen Fläche F_1^4 und der ihr entsprechende Kegelschnitt k^2 von φ sind so auf einander bezogen, als bestände zwischen ihren Ebenen eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades. In der That lässt sich diese Verwandtschaft folgendermaassen herstellen. Wir projectiren die sämtlichen Geraden der Ebene k_1^4 aus dem dreifachen Punkte $u_1 v_1 w_1$ der Fläche F_1^4 durch Ebenen; den letzteren entsprechen im Gebüsch Σ Flächen II. Ordnung, welche die Ebene k^2 oder φ in den sämtlichen, den Geraden von k_1^4 entsprechenden Kegelschnitten treffen. Offenbar sind alle diese Kegelschnitte dem Dreieck uvw umschrieben, dessen Eckpunkte die drei Hauptpunkte der Ebene φ sein müssen; und jedem Strahlenbüschel der Ebene k_1^4 entspricht in φ ein zu ihm projectivischer Kegelschnittbüschel. Umgekehrt entspricht jeder Geraden von φ ein zu ihr projectivischer Kegelschnitt der Ebene k_1^4 ; derselbe ist eine Projection des Kegelschnittes, welcher der Geraden auf der Fläche F_1^4 entspricht, aus dem dreifachen Punkte $u_1 v_1 w_1$, und geht somit durch die drei, auf u_1, v_1 und w_1 gelegenen Doppelpunkte der Curve k_1^4 . Die Steiner'sche Fläche F_1^4 wird aus ihrem dreifachen Punkte durch einen Strahlenbündel projectirt, welcher der Ebene φ geometrisch verwandt ist.

184. Enthält die Ebene φ nur einen Hauptstrahl u , und folglich die Steiner'sche Fläche F_1^4 nur eine Doppelgerade u_1 , so müssen wir in dem eben (Nr. 183) geführten Beweise den dreifachen Punkt $u_1 v_1 w_1$ durch einen Punkt D_1 von u_1 ersetzen, den wir folgendermaassen construiren. Wir legen durch u_1 irgend zwei Ebenen, und suchen zu diesen im Gebüsch Σ die entsprechenden beiden Flächen II. Ordnung. Letztere werden von der Ebene φ in der Geraden u und folglich noch in zwei Geraden geschnitten, deren gemeinschaftlichen Punkt wir D nennen; der zu D entsprechende Punkt D_1 von u_1 ist der gesuchte, welcher an

die Stelle des dreifachen Punktes tritt. Die geometrische Verwandtschaft zweiten Grades zwischen den Ebenen von k^2 und k_1^4 ist auch in diesem Falle leicht nachzuweisen.

185. Weil der Kegelschnitt k^2 auf unendlich viele Arten durch zwei projectivische Strahlenbüschel erzeugt werden kann, so ergiebt sich aus der geometrischen Verwandtschaft: *Eine ebene Schnittcurve k_1^4 der Steiner'schen Fläche kann auf unendlich viele Arten durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt werden.* Diese Kegelschnittbüschel gehen durch die Doppelpunkte von k_1^4 .

186. Die Abbildung der Steiner'schen Fläche auf einer Ebene φ hat uns so auf sehr einfache Weise zu den Haupt-Eigenschaften dieser Fläche geführt. Zu derselben Art der Abbildung sind auf ganz anderen Wegen bereits die Herren Clebsch und Cremona gelangt (s. Clebsch, Journal für d. r. u. a. Mathematik, Bd. 67 Heft I, 1867, und Cremona, Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, Vol. IV., Fasc. I, 1867). Beide beweisen u. A. noch den interessanten, von Herrn Clebsch herrührenden Satz, dass den Kegelschnitten von φ , welche dem in Nr. 181 erwähnten Vierseit eingeschrieben sind, auf der Steiner'schen Fläche F_1^4 die Curven der Haupttangente entsprechen, dass also letztere von der vierten Ordnung und zweiten Species sein müssen (vgl. Nr. 191).

187. Die in Nr. 174 aufgestellte Beziehung zwischen einem Flächengebüsch Σ II. Ordnung und einem räumlichen Systeme Σ_1 führt noch zu anderen Flächen IV. Ordnung. *Jeder in Σ_1 angenommenen Fläche II. Ordnung L_1^2 entspricht in Σ eine Fläche L^4 vierter Ordnung.*)* Denn eine beliebige Gerade von Σ hat mit L^4 genau so viele Punkte gemein, wie der entsprechende Kegelschnitt von Σ_1 mit L_1^2 , d. h. höchstens vier, wenn sie nicht ganz auf der Fläche L^4 liegt. Die Fläche L_1^2 kann durch zwei reciproke Strahlenbündel erzeugt werden; ebenso kann die Fläche L^4 vierter Ordnung auf unendlich viele Arten durch zwei reciproke Flächenbündel II. Ordnung erzeugt werden, indem jede Fläche des einen Bündels von der entsprechenden Raumcurve IV. Ordnung des anderen in höchstens acht Punkten der Fläche L^4 geschnitten

*) Ob diese Fläche L^4 die allgemeine Fläche vierter Ordnung ist? Ihre Gleichung lässt sich schreiben: $\varphi = 0$, wenn φ eine homogene Function zweiten Grades von vier Grössen t, u, v, w bedeutet, und die letzteren ganze Functionen zweiten Grades der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes bezeichnen.

wird. Ist L_1^2 eine geradlinige Fläche, also erzeugt durch zwei projectivische Ebenenbüschel, so kann L^4 durch zwei projectivische Flächenbüschel II. Ordnung erzeugt werden. Ist insbesondere L_1^2 eine Kegelfläche II. Ordnung, so entsprechen dem Mittelpunkte derselben im Allgemeinen acht sogenannte Knotenpunkte auf der Fläche L^4 .

188. *Zwei projectivische Flächenbüschel II. Ordnung erzeugen im Allgemeinen eine Fläche L^4 vierter Ordnung, welche auf einer Regelfläche L_1^2 abgebildet werden kann; denn die Flächenbüschel können stets als Bestandtheile eines Flächengebüsches II. Ordnung betrachtet werden. Diese Fläche L^4 enthält zwei Schaaren von Raumcurven IV. Ordnung, welche den beiden Regelschaaren von L_1^2 entsprechen, und jede Raumcurve der einen Schaar kann mit jeder Raumcurve der anderen Schaar durch eine Fläche II. Ordnung verbunden werden. Zwei beliebige Raumcurven der einen Schaar bestimmen mit den Raumcurven der anderen Schaar zwei projectivische Flächenbüschel II. Ordnung.*

189. *Zwei projectivische Kegelschnittbüschel, die in derselben Ebene liegen, erzeugen (Nr. 188) eine ebene Curve IV. Ordnung, welche auf unendlich viele Arten durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt werden kann.*

190. Ich entlehne der analytischen Geometrie folgenden Satz, dessen synthetischer Beweis mir bis jetzt nicht gelungen ist: „Wenn eine Curve IV. Ordnung mit einem Kegelschnitt mehr als acht Punkte gemein hat, so zerfällt sie in diesen und noch einen zweiten Kegelschnitt.“

191. *Einem Kegelschnitt des Flächengebüsches Σ entspricht in dem räumlichen Systeme Σ_1 entweder eine ebene Curve IV. Ordnung (Nr. 182), oder eine Raumcurve IV. Ordnung, durch welche eine Fläche II. Ordnung gelegt werden kann. Nämlich diese Curve hat mit einer beliebigen Ebene von Σ_1 höchstens vier Punkte gemein, weil der Kegelschnitt die entsprechende Fläche II. Ordnung von Σ in höchstens vier Punkten schneidet. Legen wir nun durch beliebige neun Punkte der Raumcurve IV. Ordnung eine Fläche L_1^2 II. Ordnung, so entspricht dieser in Σ eine Fläche L^4 IV. Ordnung; und weil letztere mit dem Kegelschnitt mehr als acht Punkte gemein hat, so wird sie von der Ebene desselben in diesem und in noch einem zweiten Kegelschnitt getroffen. Die Fläche L_1^2 geht folglich durch alle Punkte der Raumcurve IV. Ordnung; sie schneidet die Steiner'sche Fläche von Σ_1 , welche der Ebene beider Kegel-*

schnitte entspricht, in noch einer zweiten solchen Raumcurve IV. Ordnung.

Durch neun Punkte geht im Allgemeinen nur eine einzige Fläche II. Ordnung. Die hier betrachteten Raumcurven IV. Ordnung sind deshalb von denjenigen verschieden, in welchen zwei Flächen II. Ordnung sich schneiden. Im Gegensatz zu den letzteren, welche von Steiner „Raumcurven erster Species“ genannt wurden, haben jene den Namen „Raumcurven zweiter Species“ erhalten. Die Steiner'sche Fläche enthält unendlich viele solche Raumcurven IV. Ordnung; dieselben liegen paarweise auf Flächen II. Ordnung. Je fünf Punkte der Steiner'schen Fläche können durch eine dieser Raumcurven IV. Ordnung und zweiter Species verbunden werden, wenn sie nicht in einer Ebene liegen.

Steiner entdeckte die Raumcurven IV. Ordnung und zweiter Species zuerst bei der Fläche III. Ordnung. Jede Regelfläche, welche mit der letzteren zwei sich nicht schneidende Gerade a, b gemein hat, begegnet derselben ausserdem in einer solchen Raumcurve; dieselbe hat mit jeder Geraden der einen Regelschaar nur einen Punkt, mit jeder Geraden der anderen Regelschaar, zu welcher a und b gehören, im Allgemeinen drei Punkte gemein.

192. Einem Kegelschnitt des räumlichen Systemes Σ_1 entspricht im Flächengebüsch Σ eine Raumcurve achter Ordnung, durch welche eine Fläche II. Ordnung des Gebüsches hindurchgeht. Denn jede Steiner'sche Fläche von Σ_1 , welche einer Ebene von Σ entspricht, hat mit dem Kegelschnitt höchstens acht Punkte gemein, wenn derselbe nicht ganz auf ihr liegt (Nr. 190).

193. Einer Fläche IV. Ordnung von Σ_1 entspricht in dem Flächengebüsch Σ eine Fläche achter Ordnung; einer Fläche II. Ordnung von Σ entspricht in Σ_1 entweder eine Ebene oder eine Fläche achter Ordnung.

194. Den Punkten einer beliebigen Geraden des Gebüsches Σ sind (Nr. 192) die Punkte einer Raumcurve siebenter Ordnung associirt, welche mit der Geraden durch eine Fläche II. Ordnung verbunden werden kann. Ist jedoch die Gerade ein Hauptstrahl von Σ , so sind ihren Punkten diejenigen einer Raumcurve III. Ordnung associirt, von welcher die Gerade eine Secante ist (Nr. 176).

195. Den Punkten einer beliebigen Ebene sind im Flächengebüsch Σ die Punkte einer Fläche siebenter Ordnung associirt

(Nr. 178 und 193). Die Fläche geht durch alle Hauptstrahlen der Ebene, deren es nach Nr. 178 mindestens einen und höchstens drei giebt, und schneidet sich selbst in den Raumcurven III. Ordnung, welche (nach Nr. 194) diesen Hauptstrahlen associirt sind. Sie enthält doppelt unendlich viele Raumcurven siebenter Ordnung (Nr. 194); dieselben liegen paarweise auf Flächen II. Ordnung, welche von der gegebenen Ebene in je zwei Geraden geschnitten werden. Die gegebene Ebene wird von der Kernfläche des Gebüsches in einer Curve IV. Ordnung geschnitten, welche auch auf der Fläche siebenter Ordnung liegt; denn jeder Punkt der Kernfläche fällt mit einem seiner associirten zusammen, weil er der Mittelpunkt einer zum Flächengebüsche gehörigen Kegelfläche II. Ordnung ist und folglich auf unendlich vielen Raumcurven IV. Ordnung des Gebüsches als Doppelpunkt vorkommt.

196. Alle Punkte einer Ebene, welche in einer zweiten gegebenen Ebene associirte Punkte besitzen, liegen auf einer Curve siebenter Ordnung (Nr. 194 oder 195).

Besondere Fälle des Flächengebüsches zweiter Ordnung.

197. Wenn die sämtlichen Flächen II. Ordnung des Gebüsches Σ einen Punkt X mit einander gemein haben, so entspricht derselbe allen Punkten des räumlichen Systemes Σ_1 und ist allen Punkten von Σ associirt. *Jede durch X gehende Gerade s ist ein Hauptstrahl von Σ ; ihr entspricht in Σ_1 eine zu s projectivische Gerade s_1 .* Nämlich je zwei Punkte von Σ_1 , welche irgend zwei Punkten von s entsprechen, werden durch diese Gerade s_1 von Σ_1 mit einander verbunden; betrachten wir aber s_1 als Schnitt eines Ebenenbüschels, so liegt das gerade Gebilde s zu dem entsprechenden Flächenbüschel II. Ordnung perspectivisch und ist folglich auch projectivisch zu s_1 . In jeder Geraden s_1 giebt es einen Punkt X_1 , welchem in dem Hauptstrahle s nur der Punkt X entspricht, und zwar doppelt, so dass jeder durch X_1 gehenden Ebene von Σ_1 eine Fläche II. Ordnung entspricht, welche von s im Punkte X berührt wird. Daraus folgert man leicht, dass zwei Gerade s_1 von Σ_1 , welche zwei durch X gehenden Hauptstrahlen s von Σ entsprechen, im Allgemeinen nicht sich schneiden, dass also die Punkte X_1 der Geraden s_1 nicht zusammenfallen. Eine beliebige Ebene von Σ_1 enthält zwei, eine oder keine von den Geraden s_1 ,

je nachdem die entsprechende Fläche des Gebüsches Σ eine Regelfläche, eine Kegelfläche oder eine nicht geradlinige Fläche II. Ordnung ist.

198. Jeder Ebene, welche durch zwei dieser Punkte X_I hindurchgeht, entspricht im Gebüsch Σ eine Fläche II. Ordnung, welche die zugehörigen beiden Hauptstrahlen und also auch deren Ebene im Punkte X berührt; einer Ebene ξ_I , welche durch beliebige drei der Punkte X_I hindurchgeht, muss demnach in Σ eine Fläche II. Ordnung entsprechen, welche im Punkte X drei verschiedene Berührungs-Ebenen besitzt, und sich folglich auf den Punkt X oder auf eine Kegelfläche mit dem Mittelpunkte X reducirt. Wir schliessen daraus: *Die sämtlichen Punkte X_I von Σ_I , welchen der gemeinschaftliche Punkt X des Flächengebüsches Σ doppelt entspricht, liegen in einer Ebene ξ_I .* Weisen wir jedem Hauptstrahl s von X denjenigen Punkt von ξ_I zu, welcher auf der entsprechenden Geraden s_I von Σ_I enthalten ist, so entspricht jeder Geraden von ξ_I eine Ebene von X , nämlich die gemeinschaftliche Berührungs-Ebene derjenigen Flächen II. Ordnung, welche allen durch die Gerade gelegten Ebenen entsprechen. *Der Strahlenbündel X ist also collinear auf das ebene System ξ_I bezogen, und einem zu X gehörigen Strahlenbüschel entspricht in dem räumlichen Systeme Σ_I eine Schaar von Geraden, welche von der Ebene ξ_I in einem zu dem Büschel projectivischen geraden Gebilde geschnitten wird.*

199. Jeder durch X gehenden Ebene φ von Σ entspricht in Σ_I eine windschiefe (d. h. geradlinige) Fläche F_I^3 III. Ordnung, welche in Verbindung mit der Ebene ξ_I als eine Steiner'sche Fläche IV. Ordnung aufzufassen ist. Eine beliebige Gerade von Σ_I hat mit F_I^3 höchstens drei Punkte gemein, weil die entsprechende Raumcurve IV. Ordnung von Σ höchstens drei von X verschiedene Punkte mit φ gemein hat. Wird die Ebene φ durch Drehung eines Hauptstrahles s beschrieben, so durchläuft der entsprechende Strahl s_I die Fläche F_I^3 . Einer beliebigen Geraden g von φ entspricht in F_I^3 ein zu g projectischer Kegelschnitt γ_I , dessen Ebene durch eine der erzeugenden Geraden s_I von F_I^3 hindurchgeht; denn dieser Ebene entspricht im Flächengebüsch Σ eine Fläche II. Ordnung, welche von φ in der Geraden g und folglich noch in einer durch X gehenden Geraden s geschnitten wird. Die Ebene von γ_I berührt die Fläche F_I^3 in einem der beiden Punkte $s_I \gamma_I$, welchem der Schnittpunkt von s und g entspricht; dem anderen Schnittpunkte von s_I und γ_I entsprechen

auf s und g zwei einander associirte Punkte, und der Verbindungslinie u dieser letzteren entspricht auf der Fläche F_1^3 eine Doppelgerade u_1 . Weil nämlich jedem Paare associirter Punkte des Hauptstrahles u ein und derselbe Punkt P_1 von u_1 entspricht, so geht die Fläche F_1^3 zweimal durch P_1 ; und in P_1 schneiden sich die beiden Erzeugenden s_1 von F_1^3 , durch deren entsprechende Hauptstrahlen s der Punkt X mit jenen beiden associirten Punkten von u verbunden wird. Die Fläche F_1^3 hat mit der Ebene ξ_1 eine Gerade x_1 gemein (Nr. 198), deren sämtliche Punkte dem Punkte X entsprechen. Jeder durch x_1 gehenden Ebene entspricht im Gebüsch Σ eine Fläche II. Ordnung, welche von der Ebene φ im Punkte X berührt wird, also im Allgemeinen entweder keine oder zwei Hauptstrahlen s mit φ gemein hat. Im letzteren Falle schneidet die durch x_1 gelegte Ebene die Fläche F_1^3 noch in zwei Erzeugenden s_1 und berührt sie in den beiden Punkten, welche diese Erzeugenden mit x_1 gemein haben.

200. Aus den letzten beiden Nummern und aus der Abbildung der windschiefen Fläche F_1^3 III. Ordnung auf der Ebene φ ergeben sich folgende Sätze: *Die windschiefe Fläche F_1^3 enthält ausser ihren Erzeugenden s_1 noch eine Doppelgerade u_1 , sowie eine Gerade x_1 , deren Ebenen die Fläche doppelt berühren. Jede Erzeugende s_1 liegt mit einer anderen in einer Ebene des Büschels x_1 und schneidet sie in einem Punkte von u_1 ; durch diese Strahlenpaare s_1 sind die Punkte des geraden Gebildes x_1 und die Ebenen des Büschels u_1 involutorisch gepaart. Jede durch eine Erzeugende s_1 gelegte Ebene schneidet die Fläche F_1^3 noch in einem Kegelschnitt, und alle diese Kegelschnitte sind durch die sämtlichen Erzeugenden auf einander und auf das gerade Gebilde x_1 projectivisch bezogen. Die Fläche kann also auf unendlich viele Arten durch zwei projectivische Kegelschnitte erzeugt werden, welche in verschiedenen Ebenen liegen und einen Punkt entsprechend gemein haben, oder durch einen Kegelschnitt und ein zu ihm projectivisches gerades Gebilde, welches keinen Punkt mit dem Kegelschnitt gemein hat. Jede ebene Schnittcurve von F_1^3 wird in der Ebene φ durch einen Kegelschnitt dargestellt, welcher durch den Punkt X geht und von dem Hauptstrahle u in zwei associirten Punkten geschnitten wird. Enthält das involutorische Gebilde u zwei Ordnungspunkte M und N , so entsprechen den Geraden $\overline{XM}$ und $\overline{XN}$ zwei singuläre Erzeugende der windschiefen Fläche, und den Punkten M und N die sogenannten Cuspidalpunkte M_1 und N_1 . Die Berührungs-Ebene ist*

für alle Punkte einer solchen singulären Erzeugenden dieselbe. In den Punkten jeder anderen Erzeugenden s_1 erhalten wir dagegen verschiedene Berührungs-Ebenen, die aber alle durch s_1 gehen und einen, zu dem geraden Gebilde der Berührungspunkte projectivischen Ebenenbüschel bilden.

201. Jedem durch X gehenden Kegelschnitt der Ebene φ entspricht auf der windschiefen Fläche F_1^3 eine Raumcurve k_1^3 III. Ordnung; und alle durch k_1^3 gelegten Flächen II. Ordnung werden von F_1^3 in neuen Raumcurven III. Ordnung geschnitten, welche in φ ebenfalls durch Kegelschnitte dargestellt werden (vgl. Nr. 191). Auch die letzteren gehen durch X , und jeder von ihnen bildet mit dem zuerst angenommenen Kegelschnitt eine Curve IV. Ordnung, welche von dem Hauptstrahl u entweder gar nicht, oder in zwei Paar associirten Punkten geschnitten wird.

Auch die hier benutzte Abbildung der windschiefen Fläche III. Ordnung auf einer Ebene haben die Herren Clebsch und Cremona (a. a. O., s. Nr. 186) bereits angegeben.

202. Den Punkten einer durch X gehenden Geraden sind im Flächengebüsch Σ die Punkte einer Raumcurve III. Ordnung associirt, von welcher die Gerade eine Secante ist; ebenso ist einer durch X gehenden Ebene φ eine Fläche V. Ordnung associirt, welche durch eine solche Raumcurve III. Ordnung beschrieben werden kann. Diese Fläche V. Ordnung hat mit der Ebene φ deren nicht durch X gehenden Hauptstrahl u gemein sowie deren Schnittlinie mit der Kernfläche des Flächengebüsches; sie geht zweimal durch diejenige Raumcurve III. Ordnung, welche dem Hauptstrahle u associirt ist und auch den Punkt X enthalten muss.

203. Einer Fläche L_1^2 II. Ordnung von Σ_1 entspricht im Flächengebüsch Σ eine Fläche L^4 IV. Ordnung, von welcher X ein Knotenpunkt ist. In diesem Knotenpunkt X hat die Fläche L^4 unendlich viele Berührungs-Ebenen; und zwar umhüllen dieselben eine Kegelfläche II. Ordnung, weil ihnen in der Ebene ξ_1 (nach Nr. 198) die Tangenten des Kegelschnitts entsprechen, welchen ξ_1 mit L_1^2 gemein hat. Zerfällt dieser Kegelschnitt in zwei Gerade, so wird der Knotenpunkt ein sogenannter biplanarer mit nur zwei Berührungs-Ebenen.

204. Wenn die sämtlichen Flächen II. Ordnung des Gebüsches Σ ausser X noch einen zweiten Punkt Y mit einander gemein haben, so entspricht allen Punkten der Geraden $\overline{XY}$ oder

z ein und derselbe Punkt Z_1 des räumlichen Systemes Σ_1 . Denn wenn Z_1 irgend einem von X und Y verschiedenen Punkte von z entspricht, so geht jede Fläche des Gebüsches, welche einer beliebigen, durch Z_1 gehenden Ebene entspricht, durch die Gerade z . — Einer beliebig durch z gelegten Ebene φ von Σ entspricht in Σ_1 eine Regelfläche II. Ordnung F_1^2 , deren Regelschaaren durch die beiden Strahlenbüschel X und Y dargestellt werden und auf dieselben projectivisch bezogen sind. Der Geraden z von φ entsprechen zwei durch Z_1 gehende Gerade der Regelfläche F_1^2 ; einer beliebigen Geraden von φ entspricht in F_1^2 ein durch Z_1 gehender Kegelschnitt. Jeder andere Kegelschnitt der Fläche F_1^2 wird in φ durch einen, die Punkte X und Y enthaltenden Kegelschnitt dargestellt. Einem durch X und nicht durch Y gehenden Kegelschnitt von φ entspricht in F_1^2 eine Raumcurve III. Ordnung u. s. w.

205. Der durch $\overline{XY}$ gehenden Ebene φ ist im Gebüsch Σ eine Fläche III. Ordnung associirt, und zwar jeder durch X oder Y gehenden Geraden eine Raumcurve III. Ordnung, jedem Punkte von φ höchstens fünf Punkte der Fläche III. Ordnung.

206. Enthält eine Ebene φ drei Punkte X, Y, Z , welche auf allen Flächen des Gebüsches Σ aber nicht in einer Geraden liegen, so entspricht ihr in Σ_1 eine Ebene φ_1 . Zwischen φ und φ_1 besteht eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades, und X, Y, Z sind die drei Hauptpunkte von φ . Den Punkten von φ sind in dem Flächengebüsch die Punkte einer anderen Ebene φ' associirt, und zwar jedem Punkte von φ höchstens vier Punkte von φ' .

207. Von grossem Interesse ist der besondere Fall des Flächengebüsches II. Ordnung, in welchem sämtliche Flächen desselben drei und folglich alle Punkte einer Geraden mit einander gemein haben. Die Untersuchung dieses Falles, zu welcher die vorhergehenden und die folgenden Nummern Anhaltspunkte genug bieten, muss ich dem Leser überlassen. Dieselbe führt u. A. zu der Fläche IV. Ordnung mit Doppelpunkts-Geraden.

208. Im Folgenden werden wir häufig den Satz benutzen: *Wenn zwei Flächen II. Ordnung sich in einer Curve η II. Ordnung schneiden, so liegen alle übrigen gemeinschaftlichen Punkte derselben auf einem zweiten Kegelschnitt.* Wenn nämlich ausserhalb η noch gemeinschaftliche Punkte existiren, so verbinden wir irgend drei derselben A, B, C durch eine Ebene. Dieselbe schneidet die Ebene η in einer Geraden, welche entweder den Kegelschnitt η berührt, oder deren Punkte durch η und folglich durch jede der

beiden Flächen II. Ordnung involutorisch gepaart sind. Im ersteren Falle ergibt sich der Satz aus pag. 64, im letzteren aus pag. 145 der I. Abtheilung. Der zweite Kegelschnitt kann übrigens ebenso wie der erste γ in zwei Gerade zerfallen, oder sich auf eine einzige Gerade reduciren.

209. *Betrachten wir noch den besonderen Fall des Flächengebüsches Σ , in welchem alle Flächen desselben fünf und folglich alle Punkte eines Kegelschnittes γ mit einander gemein haben.* Zunächst erhalten wir statt der Sätze von Nr. 174 die folgenden: Einer beliebigen Geraden des räumlichen Systemes Σ_1 entspricht, abgesehen vom Kegelschnitt γ , nur ein Kegelschnitt in Σ , und einem Punkte von Σ_1 entsprechen nur zwei einander associirte Punkte von Σ (Nr. 208). *Ist ferner Y_1 der Punkt von Σ_1 , welcher einem beliebigen, mit γ in einer Ebene liegenden Punkte von Σ entspricht, so muss Y_1 allen Punkten der Ebene γ entsprechen; denn jeder durch Y_1 gehenden Ebene von Σ_1 entspricht in Σ eine Fläche II. Ordnung, welche in die Ebene γ und noch eine zweite Ebene zerfällt. Jeder durch Y_1 gehenden Geraden s_1 entspricht folglich, abgesehen von der Ebene γ , nur noch ein Hauptstrahl s von Σ , dessen Punkte paarweise einander associirt und dadurch involutorisch gepaart sind, und je zwei dieser Hauptstrahlen liegen in einer Ebene, welcher eine durch Y_1 gehende Ebene entspricht.*

210. *Die sämtlichen Hauptstrahlen s des Gebüsches Σ , welche den Strahlen des Punktes Y_1 entsprechen, schneiden sich in einem und demselben Punkte Y . Denn dieselben schneiden sich paarweise, ohne jedoch alle in einer Ebene zu liegen. Die einander entsprechenden Strahlenbündel Y und Y_1 sind offenbar collinear auf einander bezogen, und der Punkt Y entspricht dem Punkte Y_1 , ist also jedem Punkte der Ebene γ associirt.*

211. Durch den Punkt Y geht die Ebene jedes Kegelschnittes γ , welcher einer beliebigen Geraden g_1 des räumlichen Systemes Σ_1 entspricht. Daraus folgt: „Wenn vier Flächen II. Ordnung einen Kegelschnitt γ mit einander gemein haben, so gehen die Ebenen der übrigen sechs Kegelschnitte, in denen sie ausserdem paarweise einander begegnen, durch einen und denselben Punkt Y .“ Einem Punkte P_1 von g_1 entspricht in γ ein Paar associirter Punkte oder ein sich selbst associirter Punkt oder gar kein Punkt, je nachdem der Hauptstrahl von Y , welcher dem Strahle $\overline{Y_1 P_1}$ entspricht, den Kegelschnitt γ in zwei Punkten schneidet, in einem Punkte berührt oder gar nicht trifft. Die

sämmtlichen Punkte von Σ_1 , welchen im Gebüsch Σ je ein sich selbst associirter Punkt entspricht, liegen auf einer Fläche K_1 II. Ordnung; denn jede Gerade g_1 enthält höchstens zwei solche Punkte, weil an den entsprechenden Kegelschnitt γ aus dem Punkte Y höchstens zwei Tangenten gezogen werden können.

212. Jede Gerade x , welche dem Kegelschnitt η in einem Punkte X begegnet, ist (Nr. 197) ebenfalls ein Hauptstrahl des Gebüsches Σ ; doch sind ihre Punkte nicht durch Association involutorisch gepaart, sondern die Gerade x ist auf die entsprechende Gerade x_1 von Σ_1 projectivisch bezogen, und ihren Punkten sind diejenigen eines anderen Hauptstrahles z associirt. Die Gerade z begegnet ebenfalls dem Kegelschnitt η in einem Punkte; sie bildet mit x zusammen den Kegelschnitt, welcher der Geraden x_1 von Σ_1 entspricht, liegt also mit x in einer durch Y gehenden Ebene und schneidet x in einem sich selbst associirten Punkte. Geht die Gerade x auch durch den Punkt Y , so fällt z mit ihr zusammen; alsdann ist der Punkt X jedem anderen Punkte von x associirt, und jedem Punkte von x_1 entspricht der Punkt X und noch ein einziger anderer Punkt des Hauptstrahles x . Der letzte Satz von Nr. 209 erleidet demnach folgende Ausnahme:

213. In jedem Hauptstrahle s von Σ , welcher den Punkt Y mit einem Punkte X des Kegelschnittes η verbindet, sind dem Punkte X alle übrigen Punkte associirt; die Gerade s ist projectivisch zu der entsprechenden Geraden s_1 von Σ_1 , aber alle Punkte der letzteren entsprechen zugleich dem Punkte X . Wir wollen fortan mit H die Kegelfläche II. Ordnung bezeichnen, durch welche der Kegelschnitt η aus dem Punkte Y projecirt wird, und mit H_1 die entsprechende Kegelfläche des Bündels Y_1 .

214. Die Kegelschnitte von Σ_1 , welche (Nr. 177) den Geraden von Σ entsprechen, haben den Punkt Y_1 mit einander gemein. Einer nicht durch Y gehenden Ebene φ von Σ entspricht (Nr. 197) in Σ_1 eine durch Y_1 gehende Regel-, Kegel- oder nicht geradlinige Fläche F_1^2 II. Ordnung, jenachdem die Ebene φ mit dem Kegelschnitt η zwei Punkte, einen oder keinen Punkt gemein hat. Jedem Punkte von F_1^2 entspricht in φ ein einziger Punkt, und nur dem Punkte Y_1 eine Gerade; jedem Kegelschnitt von F_1^2 entspricht in φ ein projectivischer Kegelschnitt, wenn er nicht durch Y_1 geht, sonst eine Gerade.

215. Alle Punkte einer Ebene φ , welche in einer anderen Ebene ψ associirte Punkte besitzen, liegen im Allgemeinen auf einem

Kegelschnitt. Den Ebenen φ und ψ von Σ entsprechen nämlich im räumlichen Systeme Σ_1 zwei Flächen II. Ordnung; dieselben haben eine durch Y_1 gehende Curve II. Ordnung gemein, welche der Geraden $\varphi\psi$ entspricht, und folglich im Allgemeinen noch einen zweiten Kegelschnitt k_1 (Nr. 208). Dem Kegelschnitt k_1 entsprechen in φ und ψ zwei einander associirte Curven, welche offenbar Kegelschnitte sind; denn sie liegen auf derjenigen Fläche II. Ordnung von Σ , welche der Ebene von k_1 entspricht.

216. Einer nicht durch Y gehenden Ebene φ ist (Nr. 215) im Gebüsch Σ eine Fläche II. Ordnung associirt, welche durch Y und den Kegelschnitt η hindurchgeht. Alle sich selbst associirten Punkte von φ liegen folglich auf einem Kegelschnitt, und *alle sich selbst associirten Punkte des Gebüsches Σ müssen auf einer Fläche K II. Ordnung liegen, welche im Kegelschnitt η von der Kegelfläche H berührt wird.* Die Fläche K ist die Kernfläche des Gebüsches (vgl. Nr. 195) und auf ihr liegen die Mittelpunkte aller im Gebüsch enthaltenen Kegelflächen II. Ordnung. Dieser Kernfläche entspricht in Σ_1 wiederum eine Fläche K_1 II. Ordnung (Nr. 211). *Je zwei associirte Punkte liegen mit Y auf einer Geraden, und sind, wenn letztere die Fläche K schneidet, durch K harmonisch getrennt.* Offenbar sind wir hier zu derselben involutorischen Beziehung zwischen den Punkten des unendlichen Raumes gelangt, welche schon in Nr. 110 aufgestellt wurde, und von welcher wir durch das Princip der reciproken Radien (Nr. 147) einen speciellen Fall erhalten.

217. Einer beliebigen Geraden ist (Nr. 216) im Gebüsch Σ ein durch Y gehender Kegelschnitt associirt, einem beliebigen Kegelschnitt k^2 aber eine ebene oder eine Raumcurve k^4 IV. Ordnung, jenachdem k^2 mit Y in einer Ebene liegt oder nicht. Der Punkt Y ist ein Doppelpunkt von k^4 und den beiden Schnittpunkten von k^2 und der Ebene η associirt. Ist k^4 eine Raumcurve IV. Ordnung, so schneiden sich in ihr die Kegelfläche Yk^2 und die Fläche II. Ordnung, welche der Ebene von k^2 associirt ist; sie ist also von der ersten Species.

218. Wenn ein Kegelschnitt k^2 mit der Curve η in einer Fläche II. Ordnung liegt, so ist ihm nicht eine Curve IV. Ordnung, sondern ein zu ihm projectivischer Kegelschnitt associirt. Nämlich der Ebene von Σ_1 , welche von irgend drei Punkten A, B, C von k^2 die entsprechenden enthält, entspricht im Gebüsch Σ eine Fläche II. Ordnung, welche durch η und A, B, C , also auch durch k^2 hindurchgeht (Nr. 208). Und diese Fläche II. Ordnung wird von

der Kegelfläche Yk^2 zum zweiten Male in dem zu k^2 associirten Kegelschnitt getroffen. Für den Fall, dass die Ebene von k^2 durch den Punkt Y hindurchgeht, ergiebt sich der Satz aus dem jetzt bewiesenen folgenden:

219. *Einer beliebig durch den Kegelschnitt τ_1 gelegten Fläche II. Ordnung ist eine andere, durch τ_1 gehende Fläche II. Ordnung associirt (Nr. 218), und ausserdem die Kegelfläche $Y\tau_1$ oder H .*

220. *Einer ganz beliebigen Fläche F^2 II. Ordnung ist (Nr. 217) eine Fläche F^4 IV. Ordnung associirt, von welcher Y ein Knotenpunkt ist. Die Tangenten von F^4 im Punkte Y bilden eine Kegelfläche II. Ordnung, von welcher F^4 noch in einer Raumcurve IV. Ordnung und erster Species geschnitten wird; diese Kegelfläche geht durch den Kegelschnitt, welchen F^2 mit der Ebene τ_1 gemein hat. Alle übrigen Tangenten, welche noch aus dem Knotenpunkte Y an die Fläche F^4 gezogen werden können, berühren F^4 in den Punkten einer Raumcurve IV. Ordnung und bilden eine zweite Kegelfläche II. Ordnung, welche auch die Fläche F^2 berührt. Der Kegelschnitt τ_1 ist eine Doppelpunktscurve von F^4 , weil F^2 von jedem Strahle der Kegelfläche H im Allgemeinen zweimal geschnitten wird (vergl. Nr. 213). Einem beliebigen Kegelschnitt von F^2 entspricht im Allgemeinen auf F^4 eine Raumcurve IV. Ordnung und erster Species; diese Raumcurven liegen paarweise auf Kegelflächen II. Ordnung mit dem Mittelpunkt Y .*

221. *Die Fläche F^4 enthält im Allgemeinen vier durch Y gehende Gerade; dieselben verbinden Y mit den Schnittpunkten X von F^2 und τ_1 (Nr. 213). Jede Ebene, welche durch zwei dieser Schnittpunkte X hindurchgeht, hat mit F^2 einen Kegelschnitt gemein, welchem in F^4 ein zu ihm projectivischer Kegelschnitt associirt ist (Nr. 218). Die Fläche F^4 enthält also im Allgemeinen sechs Schaaren von Kegelschnitten, oder kann auf sechsfache Art durch einen veränderlichen Kegelschnitt beschrieben werden; und zwar geht durch einen beliebigen Punkt von F^4 ein einziger Kegelschnitt von jeder Schaar. Eine beliebige Ebene schneidet die Fläche F^4 in einer Curve IV. Ordnung, welche mit jeder von den Geraden YX einen Punkt gemein hat und im Allgemeinen auf dem Kegelschnitt τ_1 zwei Doppelpunkte besitzt; ihr entspricht auf F^2 eine durch die vier Punkte X gehende Raumcurve IV. Ordnung (Nr. 216). Daraus folgt leicht: Die sechs Kegelschnittschaaren von F^4 sind paarweise einander zugeordnet, so dass jeder Kegelschnitt der einen Schaar mit einem Kegelschnitt der zugeordneten Schaar in einer*

Ebene ε liegt. Von den vier Schnittpunkten dieser beiden Kegelschnitte liegen zwei auf η ; in den übrigen beiden wird F^4 von der Ebene ε berührt, weil F^2 von der zu ε associirten Fläche II. Ordnung ebenfalls in zwei Punkten berührt wird. Die Fläche F^4 besitzt also drei Schaaren doppelt berührender Ebenen, und hat mit jeder dieser Ebenen zwei Kegelschnitte gemein.

222. Aus der Abbildung von F^4 auf F^2 und aus Nr. 221 ergibt sich sofort: *Durch eine beliebige von den sechs Kegelschnittschaaren werden die Punkte jedes Kegelschnittes, welcher der zugeordneten Schaar angehört, involutorisch gepaart, die Kegelschnitte der übrigen vier Schaaren aber projectivisch auf einander bezogen.* Aus dem ersten Theil dieses Satzes folgt, dass die sämtlichen Ebenen jeder Schaar sich in einem und demselben Punkte U schneiden. Zwei einander zugeordnete Kegelschnitte, welche auf keiner dieser Ebenen U liegen, werden nun von letzteren projectivisch geschnitten, und zwar offenbar so, dass sie zwei Punkte entsprechend gemein haben; dieselben erzeugen desshalb im Allgemeinen einen Strahlenbüschel II. Ordnung (I. Abth. pag. 114), und es folgt: *Jede von den drei Schaaren doppelt berührender Ebenen bildet einen Ebenenbüschel U II. Ordnung; die Doppeltangenten von F^4 , welche in diesen Ebenen liegen, bilden die von U eingehüllte Kegelfläche II. Ordnung.* Wäre der letzte Theil des Satzes falsch, so würden offenbar durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten im Allgemeinen zwei Kegelschnitte von einer und derselben Schaar gehen, im Widerspruch mit Nr. 221. Weil zu den doppelt berührenden Ebenen von F^4 auch diejenigen sechs gehören, durch welche die vier Geraden $\overline{YX}$ paarweise verbunden werden, so enthält jeder von den drei Ebenenbüscheln U zwei von diesen sechs Ebenen, welche einander gegenüber liegen.

223. *Ist F^2 eine Regelfläche, so enthält F^4 noch zwei weitere Schaaren von Kegelschnitten, die alle durch Y gehen und paarweise auf den, aus Y an F^2 gelegten Berührungs-Ebenen enthalten sind (Nr. 217). Ausser den Strahlen $\overline{YX}$ lassen sich dann noch vier Paar andere Gerade auf der Fläche F^4 angeben; dieselben entsprechen den vier Paar Strahlen der Regelfläche, welche durch die vier Punkte X hindurchgehen, und schneiden paarweise die Geraden $\overline{YX}$.* Ein besonderer Fall dieser Fläche F^4 ist die Cyclide von Dupin; dieselbe wird nämlich gewonnen, wenn man nach dem Princip der reciproken Radien (Nr. 147) eine Regelfläche verwandelt.

224. Wenn F^2 durch Y hindurchgeht, so zerfällt F^4 in die Ebene η und eine Fläche III. Ordnung. — Von Interesse ist noch die Untersuchung der Fläche F_1^4 von Σ_1 , welche einer Fläche F^2 II. Ordnung von Σ entspricht. Man findet, dass F_1^4 dieselben Eigenschaften hat, wie die eben betrachtete Fläche F^4 . Von Nutzen ist bei dieser Untersuchung der Satz: *Die Fläche F^2 enthält eine Raumcurve IV. Ordnung, deren Punkte paarweise einander associirt sind*; nämlich F^2 wird von F^4 in dieser und noch in einer zweiten Raumcurve IV. Ordnung geschnitten, und zwar liegt die letztere auf der Kernfläche des Gebüsches (Nr. 216).

225. *Einer beliebigen Fläche L_1^2 II. Ordnung von Σ_1 entspricht in Σ eine Fläche L^4 IV. Ordnung, an welche aus dem Punkte Y im Allgemeinen unendlich viele Doppeltangenten gelegt werden können. Diese Doppeltangenten bilden eine Kegelfläche II. Ordnung, und berühren die Fläche L^4 in den Punkten einer Raumcurve IV. Ordnung und erster Species; denn sie entsprechen den Tangenten, welche aus dem Punkte Y_1 an L_1^2 gelegt werden können. Aus Y lassen sich ausserdem unendlich viele einfache Tangenten an L^4 legen; die Berührungspunkte derselben liegen auf einer Raumcurve IV. Ordnung, in welcher L^4 von der Kernfläche des Gebüsches geschnitten wird, und sind desshalb sich selbst associirt. Der Kegelschnitt η ist eine Doppelpunktscurve der Fläche L^4 (Nr. 213), weil L_1^2 von jedem Strahle der Kegelfläche H_1 im Allgemeinen zweimal geschnitten wird. Einem beliebigen Kegelschnitt von L_1^2 entspricht im Allgemeinen auf L^4 eine Raumcurve IV. Ordnung und erster Species. Diese Raumcurven liegen paarweise auf Kegelflächen II. Ordnung mit dem Mittelpunkte Y . Ist L_1^2 eine Regelfläche, so enthält L^4 zwei Schaaren von Kegelschnitten, deren Ebenen durch Y gehen und die Fläche L^4 doppelt berühren. Geht L_1^2 durch Y_1 , so zerfällt L^4 in die Ebene η und eine Fläche III. Ordnung.*

226. Es ist nicht meine Absicht, auch diese Fläche L^4 IV. Ordnung eingehender zu besprechen, von welcher die Fläche F^4 der Nr. 220 ein specieller Fall ist; ich begnüge mich mit einer Bemerkung über die Kegelschnitte, welche auf L^4 liegen können. Einem Kegelschnitt k^2 von Σ entspricht im Allgemeinen eine Raumcurve IV. Ordnung in Σ_1 , und nur dann ein Kegelschnitt k_1^2 , wenn k^2 mit der Curve η durch eine Fläche II. Ordnung verbunden werden kann (Nr. 218). Im letzteren Fall giebt es noch einen zu k^2 associirten Kegelschnitt, welcher ebenfalls

dem k_1^2 entspricht. *Drei beliebige Punkte A, B, C von Σ können (Nr. 218) stets durch einen einzigen Kegelschnitt verbunden werden, welchem in Σ_1 wiederum ein Kegelschnitt entspricht; drei Punkte von Σ_1 können im Allgemeinen durch vier Kegelschnitte verbunden werden, welchen in Σ je ein Paar Kegelschnitte entsprechen.*

227. Von einer nicht durch Y gehenden Ebene φ wird L^4 nur dann in Kegelschnitten getroffen, wenn L_1^2 mit der der φ entsprechenden Fläche II. Ordnung von Σ_1 nicht eine Raumcurve IV. Ordnung, sondern zwei Kegelschnitte gemein hat, also von derselben doppelt berührt wird. *Also jede Ebene, welche mit L^4 Kegelschnitte gemein hat, ist eine doppelt berührende Ebene der Fläche L^4 . Die Kegelschnitte der Fläche L^4 sind paarweise einander oder in besonderen Fällen sich selbst associirt.* — Gerade Linien enthält L^4 nur dann, wenn L_1^2 eine Regelfläche oder Kegelfläche II. Ordnung ist und einzelnen Strahlen derselben Hauptstrahlen des Gebüsches Σ entsprechen.

228. Der in den letzten 19 Nummern betrachtete Fall des Flächengebüsches Σ II. Ordnung schliesst noch einen ganz besonderen Fall in sich. Nämlich die sämtlichen Flächen des Gebüsches können noch ausser dem Kegelschnitt η einen Punkt mit einander gemein haben. Derselbe übernimmt alsdann die Rolle des Punktes Y , denn durch ihn gehen alle Hauptstrahlen s des Gebüsches, welche den Kegelschnitt η nicht treffen. Die Punkte eines solchen Hauptstrahles s sind jedoch nicht mehr durch Association involutorisch gepaart, sondern die Gerade s ist (Nr. 197) auf die entsprechende Gerade s_1 von Σ_1 projectivisch bezogen. Gleichwie diese Hauptstrahlen s von Σ alle durch den Punkt Y gehen, so schneiden sich die entsprechenden Strahlen s_1 von Σ_1 alle in dem Punkte Y_1 . Letzterem entsprechen alle Punkte der Ebene η , und ebenso entsprechen dem Punkte Y die sämtlichen Punkte einer Ebene η_1 von Σ_1 (Nr. 197).

229. *Die Räume Σ und Σ_1 sind demnach so auf einander bezogen, dass die collinearen Strahlenbündel Y und Y_1 einander entsprechen und je zwei homologe Gerade dieser Bündel projectivisch auf einander bezogen sind, jedoch in der Art, dass jedem der Punkte Y und Y_1 eine nicht durch den anderen gehende Ebene η_1 oder η entspricht. Jeder Ebene des einen Raumes entspricht im Allgemeinen eine Fläche II. Ordnung in dem anderen, und alle diese Flächen II. Ordnung haben einen Kegelschnitt (η oder η_1), und ausserdem einen Punkt (Y oder Y_1) mit einander gemein. Ueber-*

haupt ist die Beziehung von Σ zu Σ_1 ganz dieselbe wie diejenige von Σ_1 zu Σ , was von den übrigen Fällen des Flächengebüsches keineswegs gilt. Wenn die collinearen Strahlenbündel Y und Y_1 einander gleich sind und so in einander gelegt werden, dass sie alle ihre Elemente entsprechend gemein haben, und wenn alsdann auch die Ebenen η und η_1 auf einander fallen, so liegen die Räume Σ und Σ_1 involutorisch. Sie bilden alsdann ganz dasselbe involutorische räumliche System, zu welchem wir in Nr. 216 und schon früher in Nr. 110 gelangt sind. Einer beliebigen Fläche II. Ordnung des einen Raumes entspricht also im anderen Raume eine Fläche IV. Ordnung, deren Haupt-Eigenschaften wir schon in Nr. 220 bis 223 erörtert haben. Bemerkenswerth ist noch, dass zwischen je zwei ebenen Systemen von Σ und Σ_1 , deren Träger in den collinearen Bündeln Y und Y_1 einander entsprechen, eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades besteht (vergl. Nr. 206).

230. Die in Nr. 174 aufgestellte Beziehung zwischen einem Flächengebüsch Σ II. Ordnung und einem räumlichen Systeme Σ_1 giebt noch zu vielen Fragen Anlass, die hier nicht weiter erörtert werden sollen. Von grossem Interesse scheint mir namentlich die Untersuchung, wie im allgemeinen Falle die Hauptstrahlen s von Σ und die ihnen entsprechenden Strahlen s_1 von Σ_1 im Raume vertheilt sind. Wir wissen bis jetzt nur, dass durch einen beliebigen Punkt höchstens sieben Hauptstrahlen s hindurchgehen und mindestens einer, und dass in einer beliebigen Ebene nicht weniger als einer und nicht mehr als drei derselben liegen. Selbst dieser Satz kann aber für einzelne besondere Punkte und Ebenen Ausnahmen erleiden. Von den Geraden s_1 gehen höchstens 28 durch einen beliebigen Punkt.

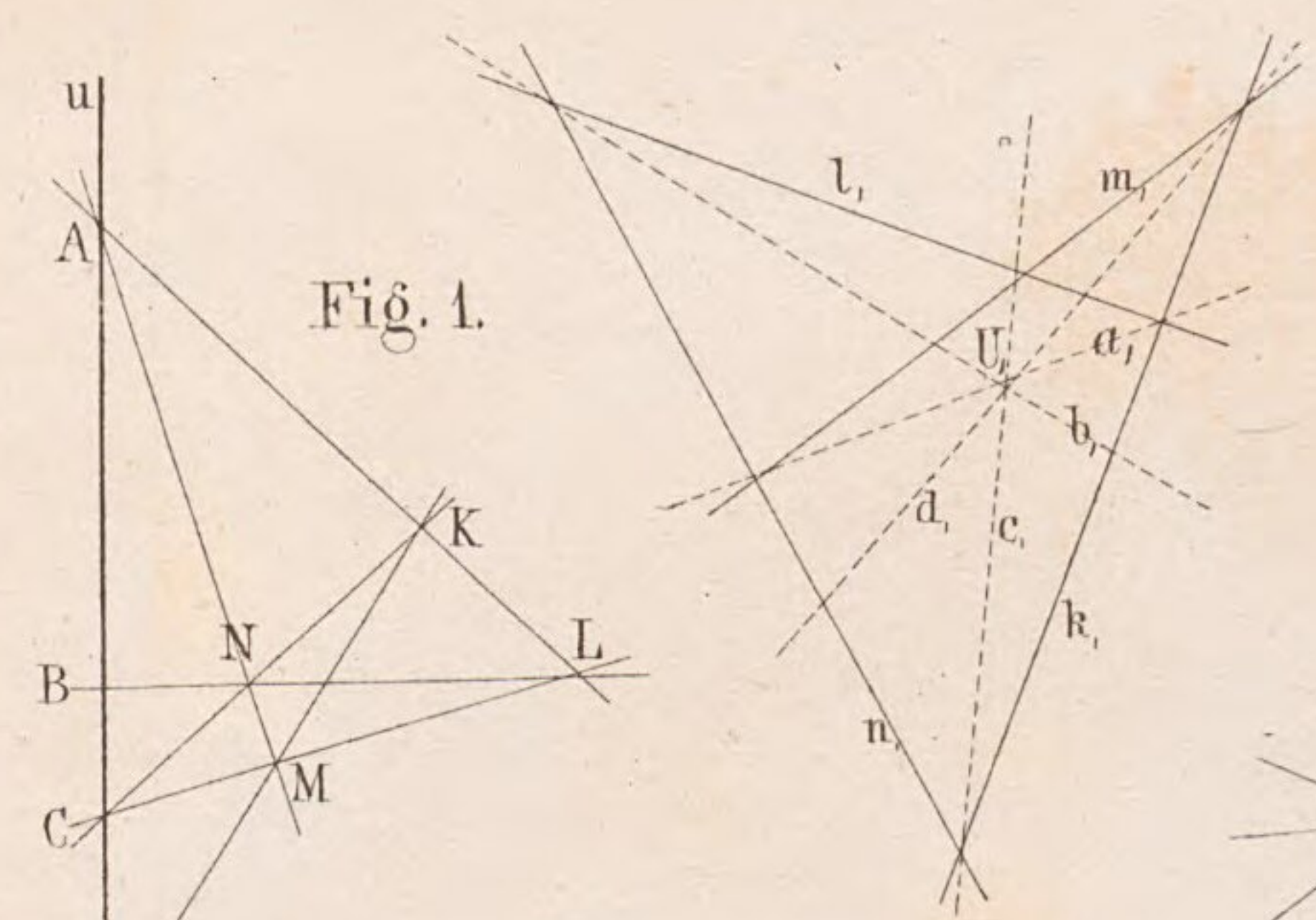


Fig. 1.

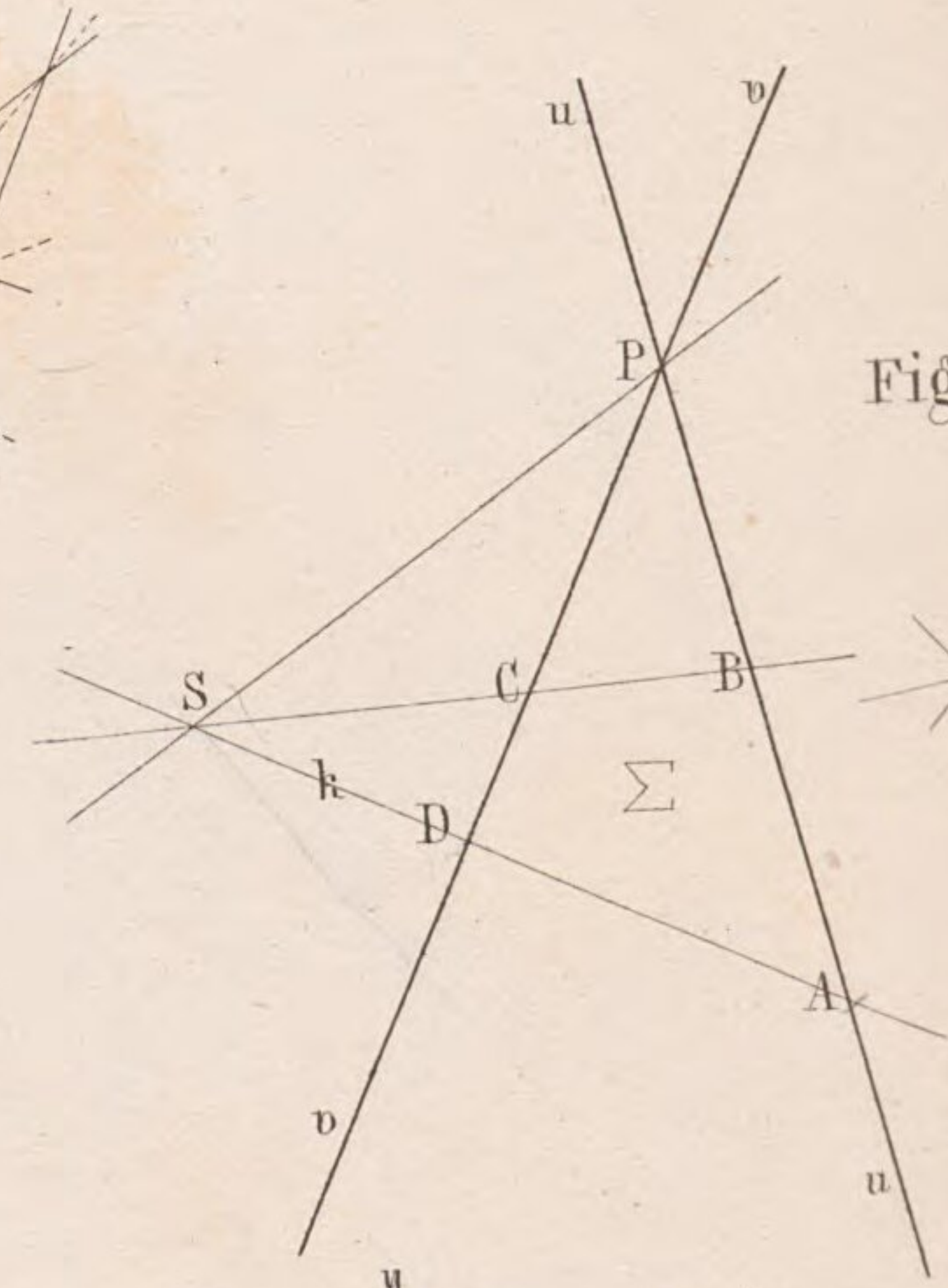


Fig. 2.

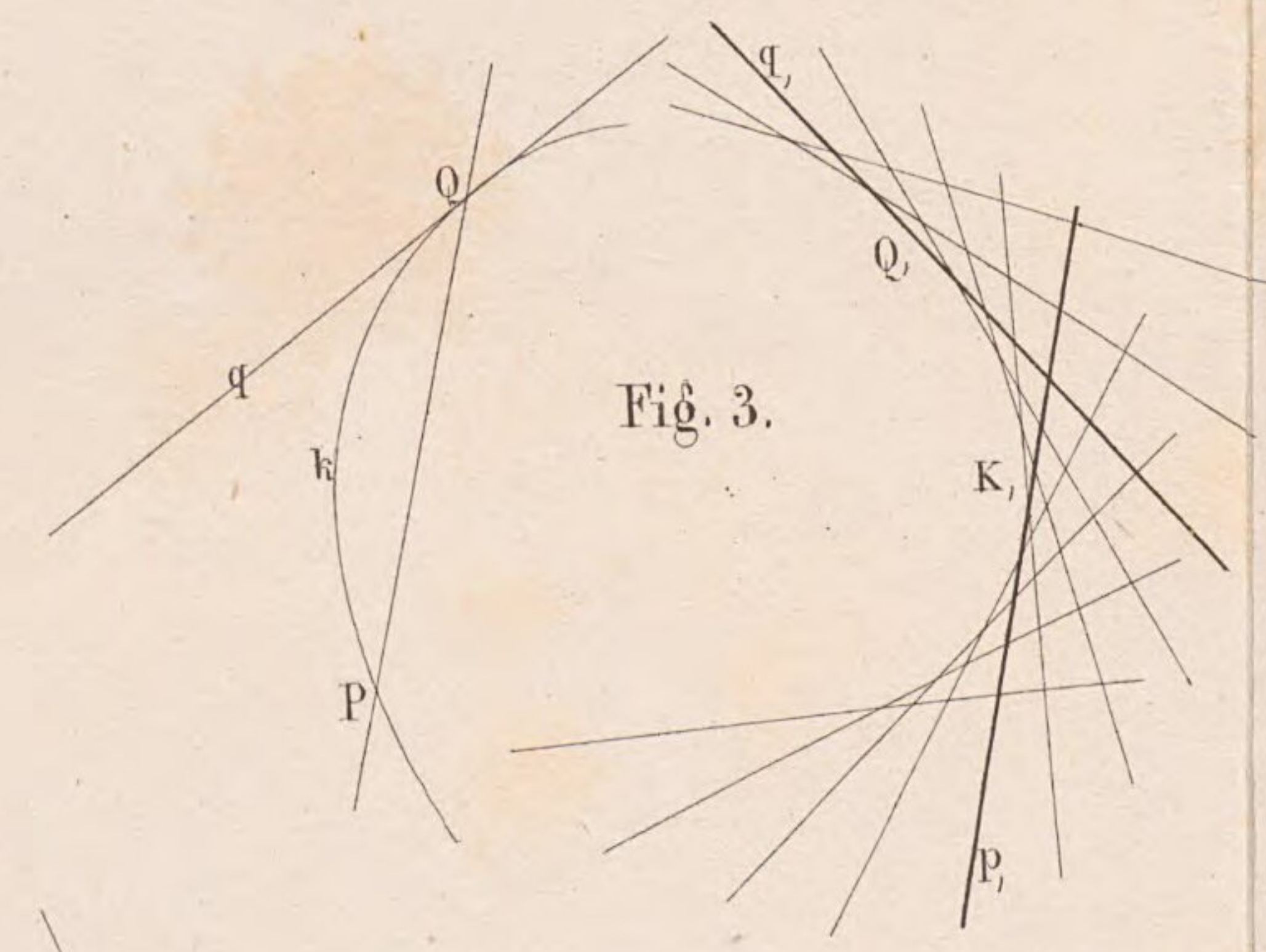


Fig. 3.

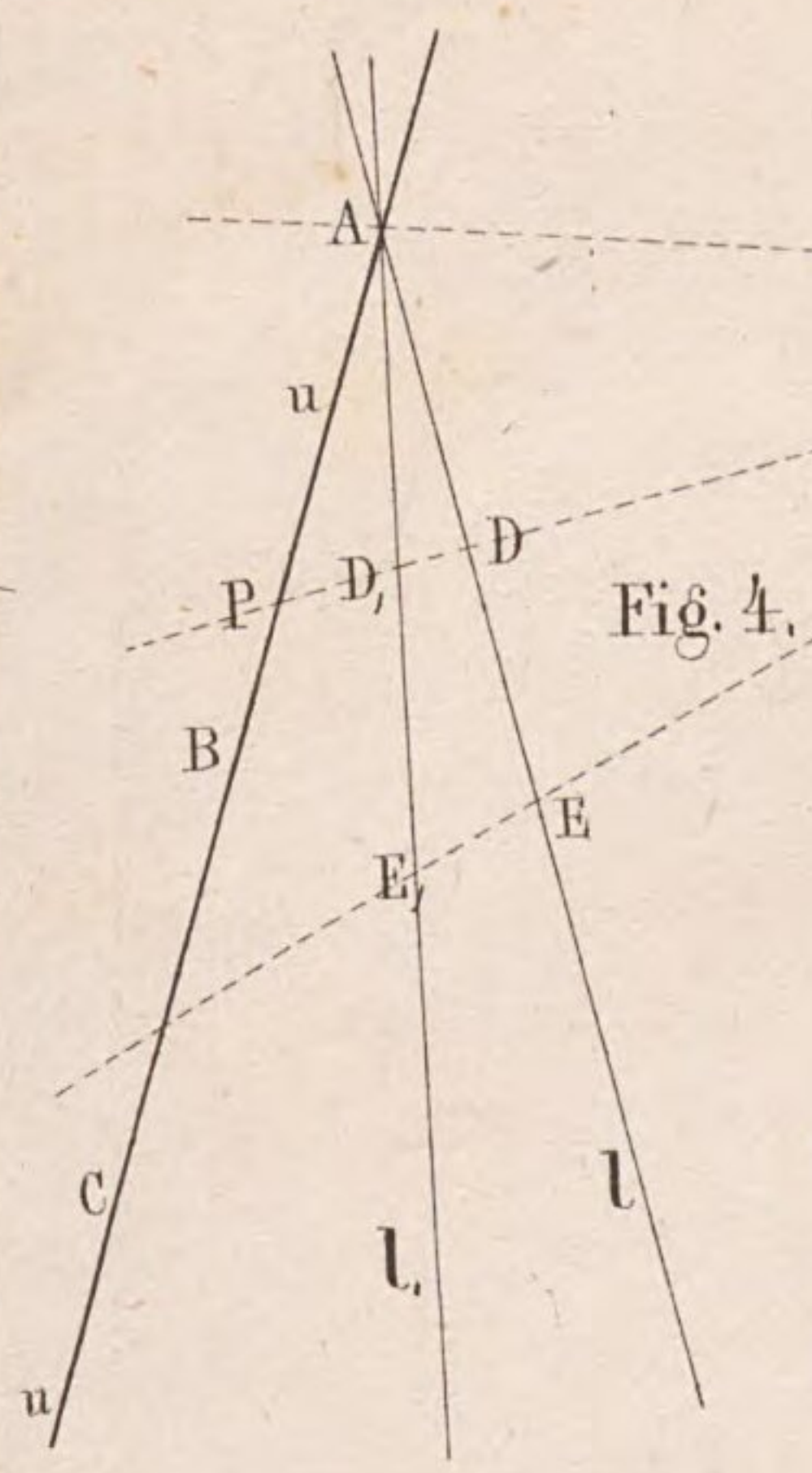


Fig. 4.

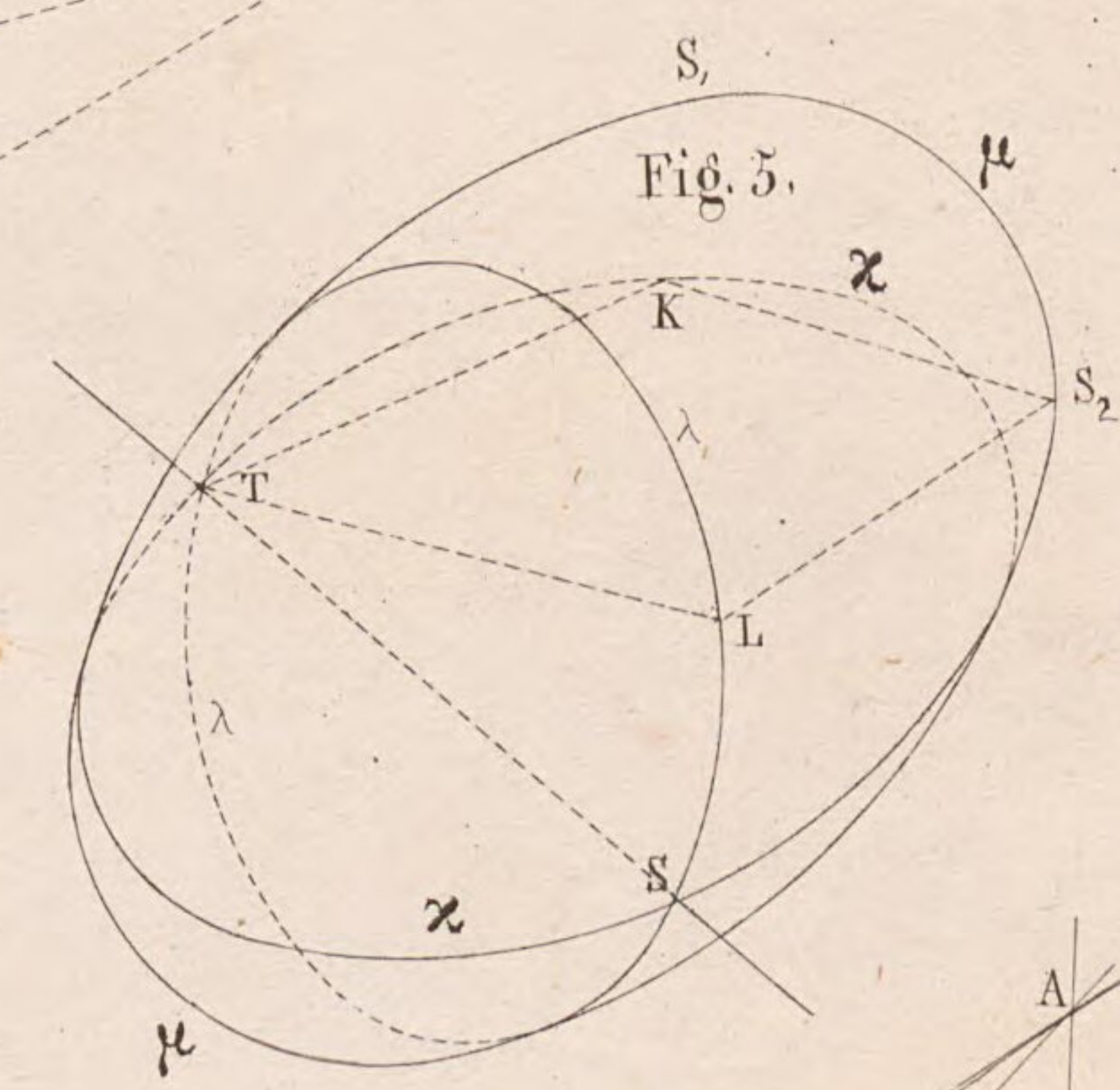


Fig. 5.

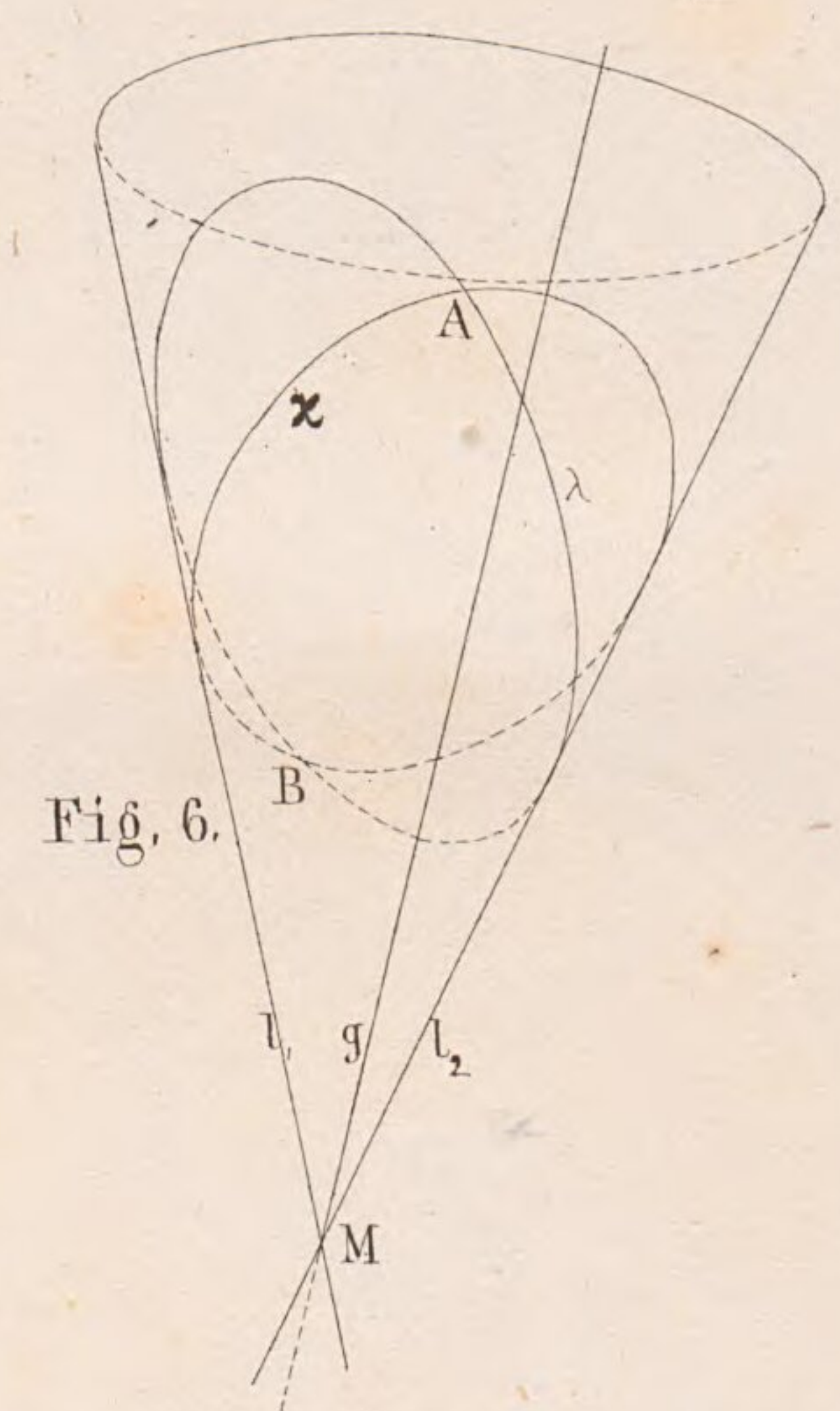


Fig. 6.



Fig. 7.

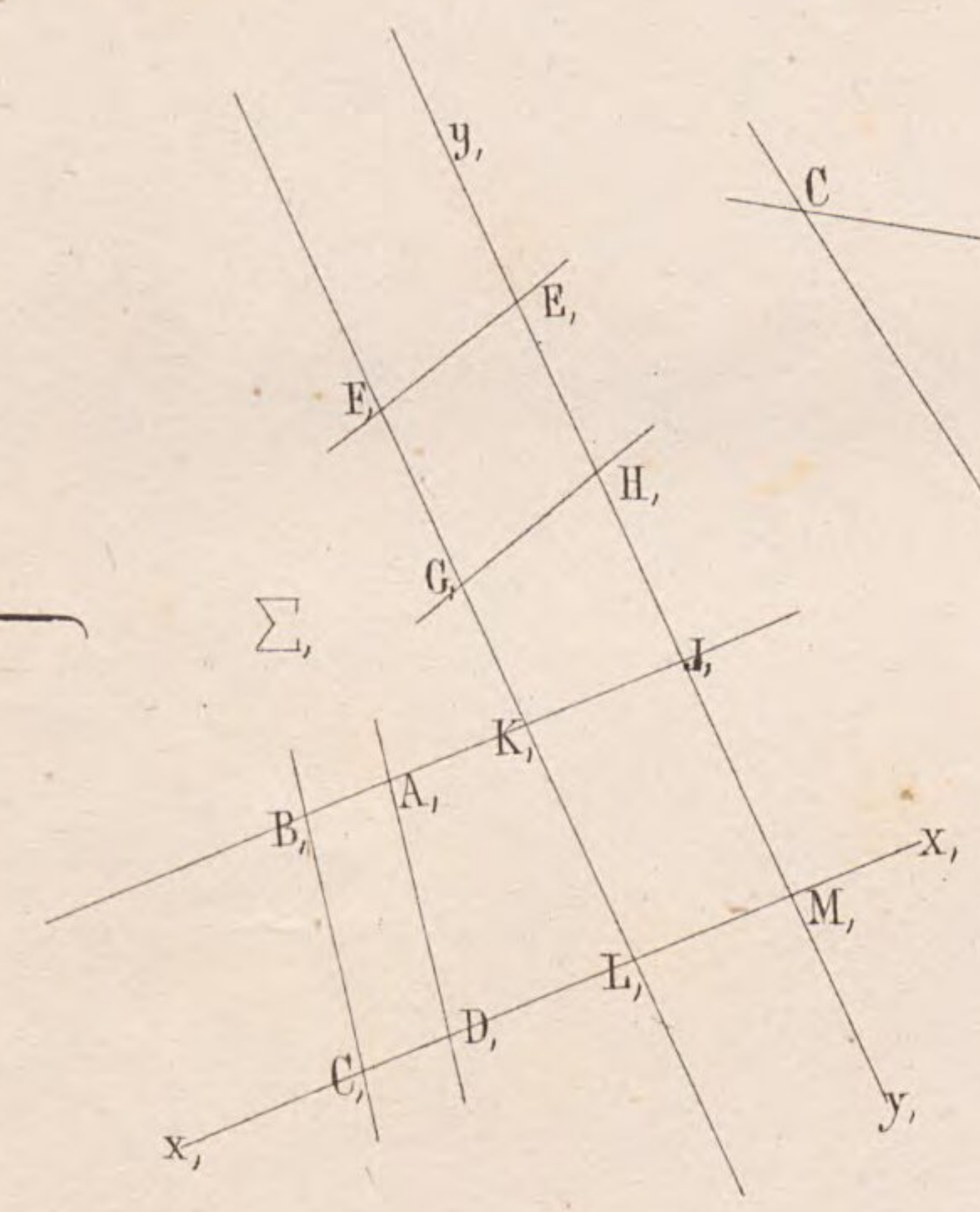


Fig. 8.

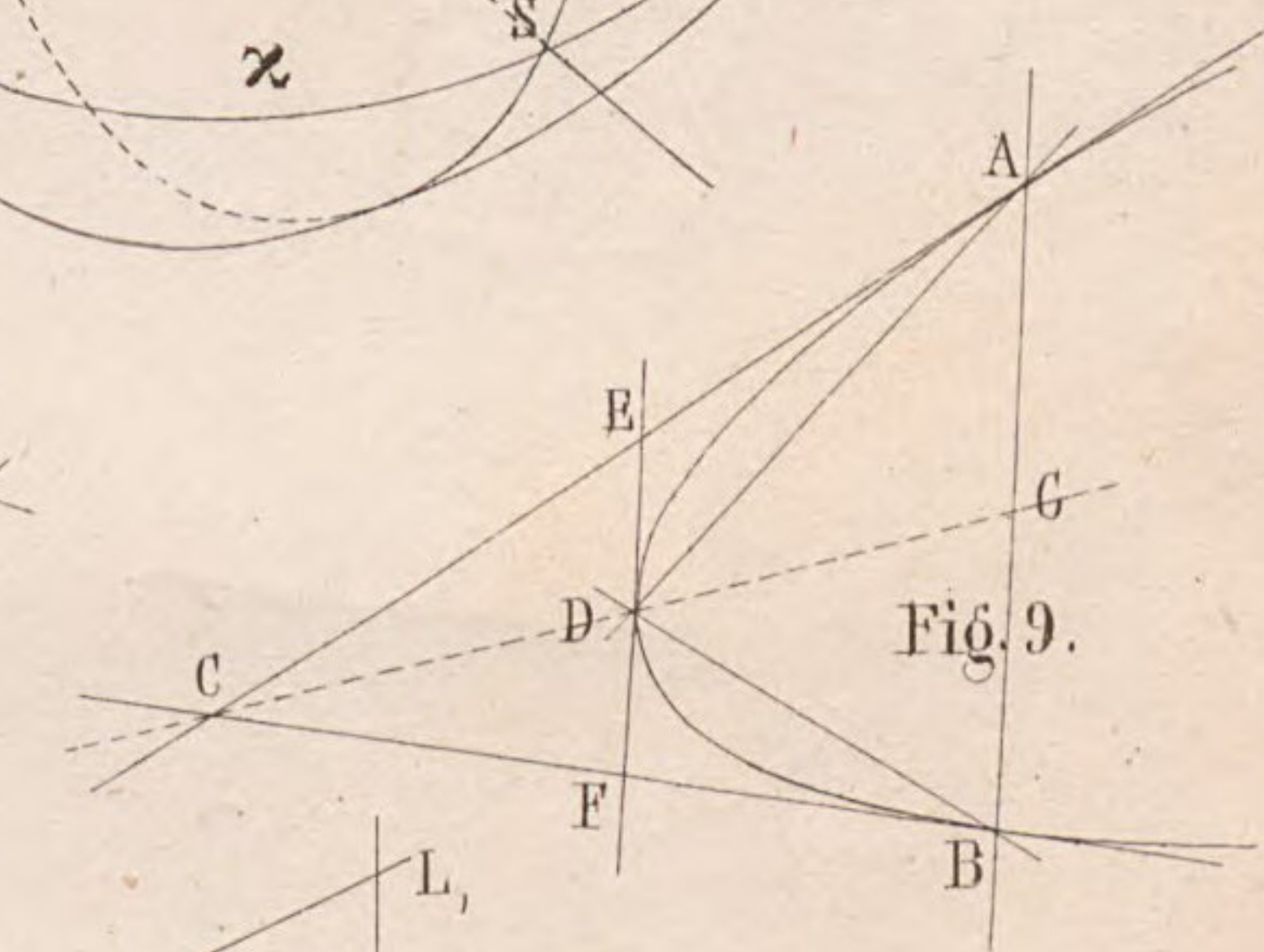


Fig. 9.

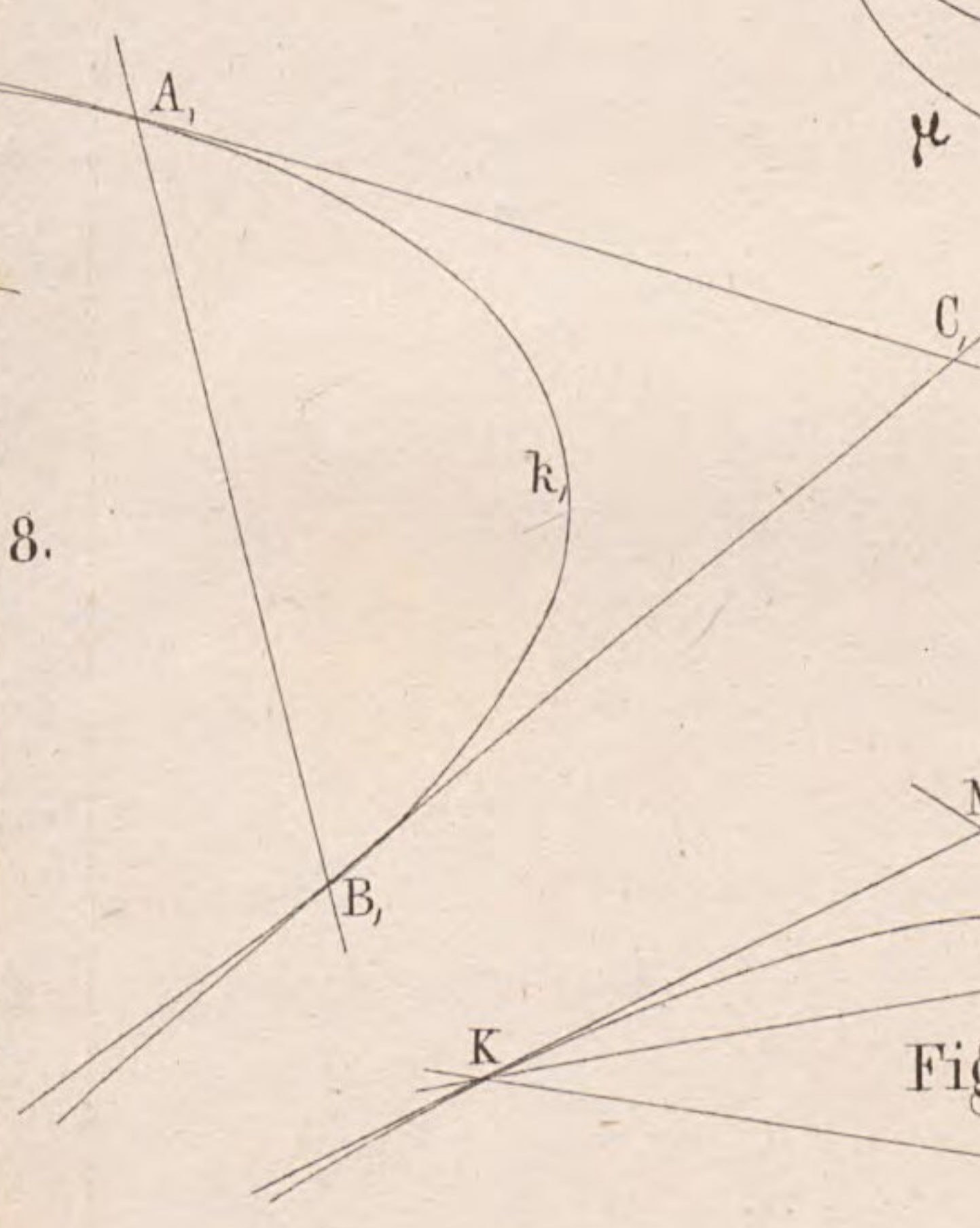


Fig. 10.

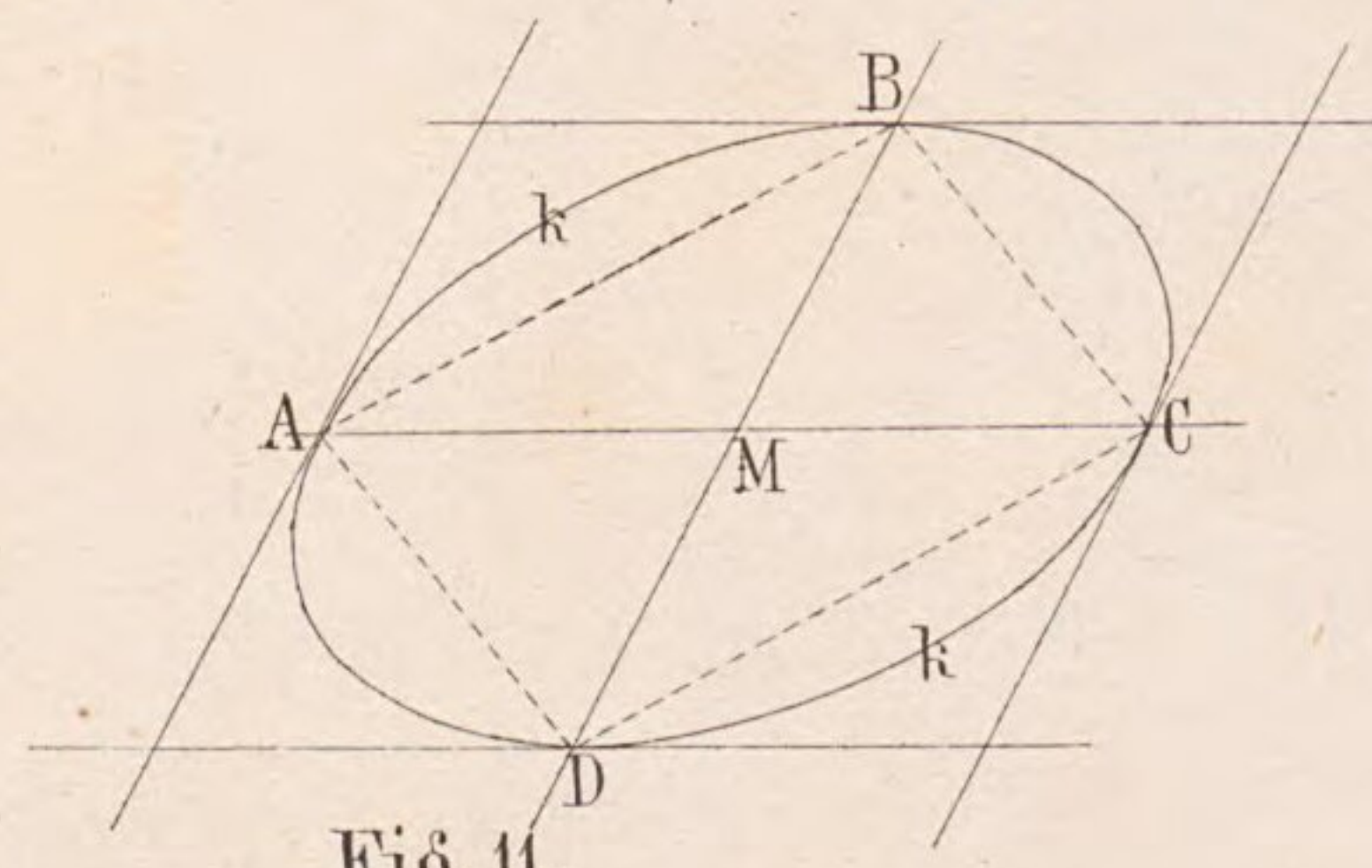


Fig. 11.

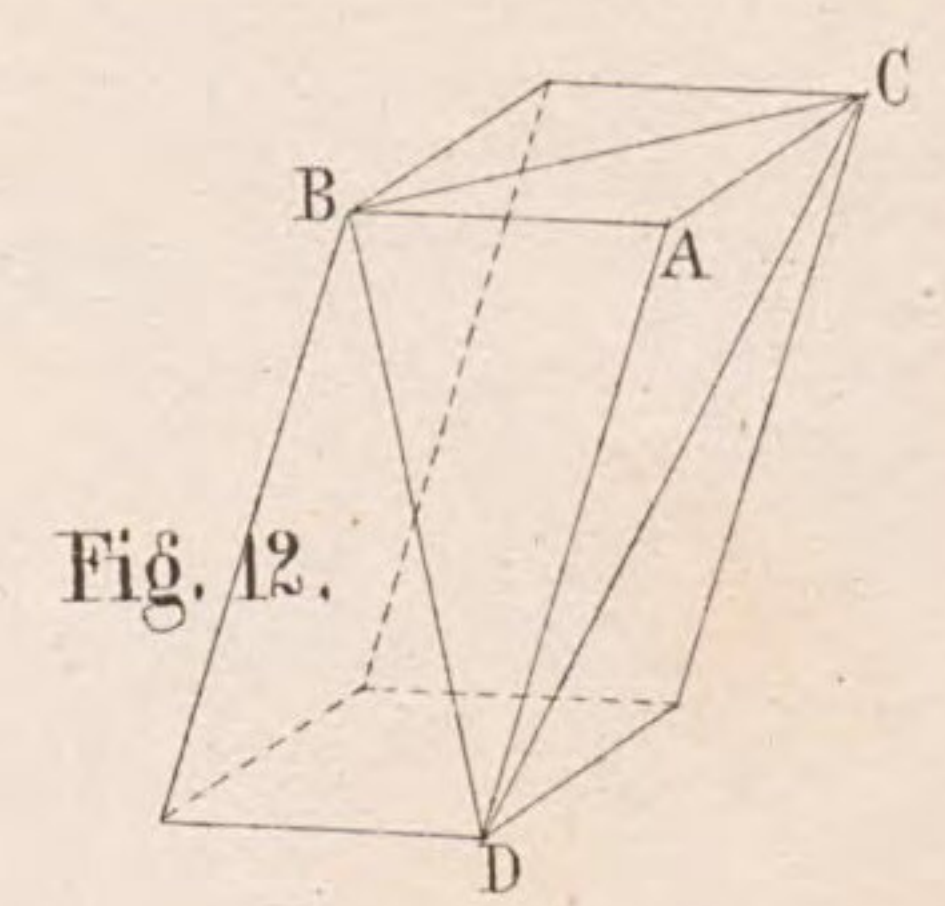


Fig. 12.

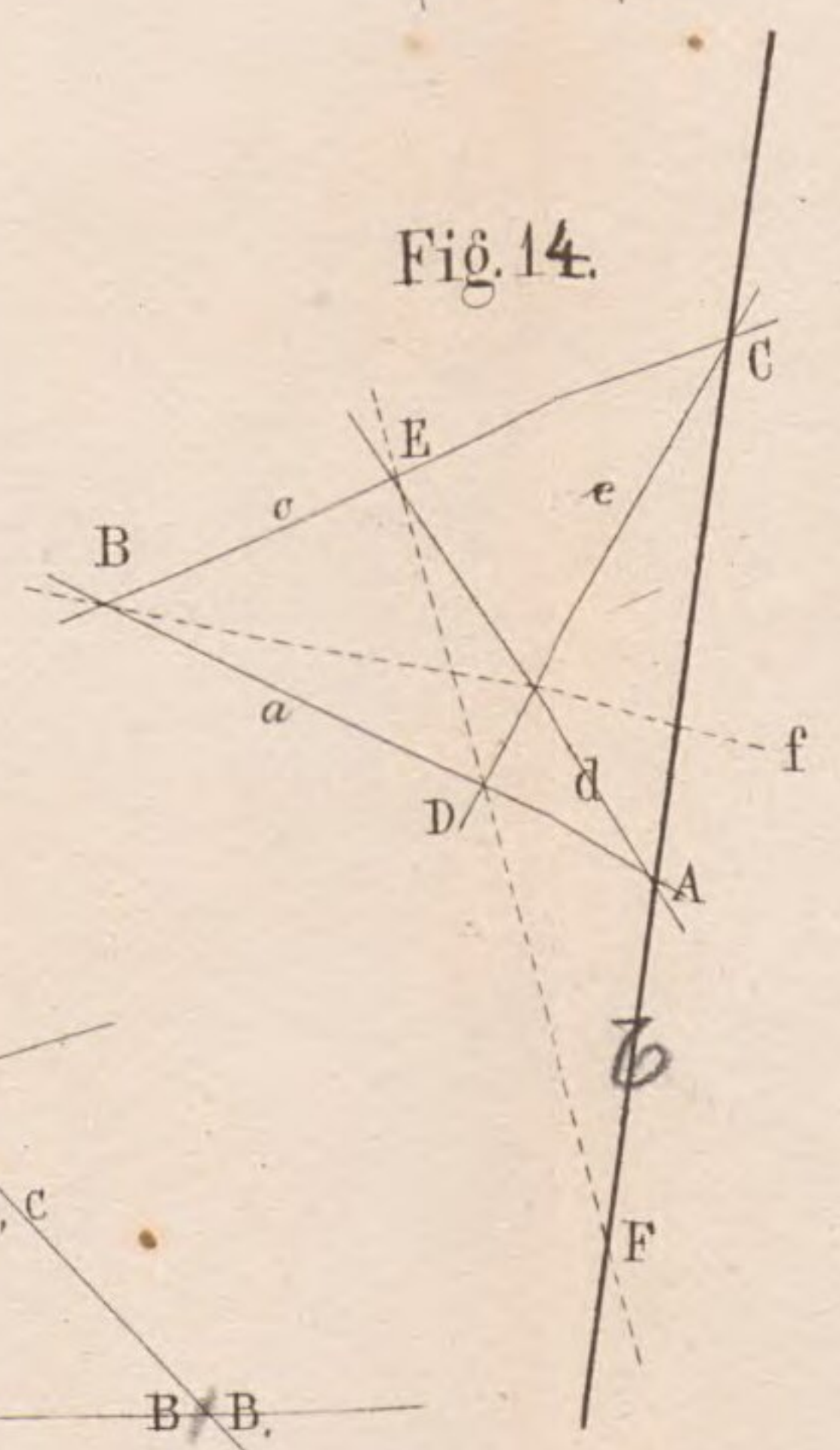


Fig. 13.

Fig. 14.

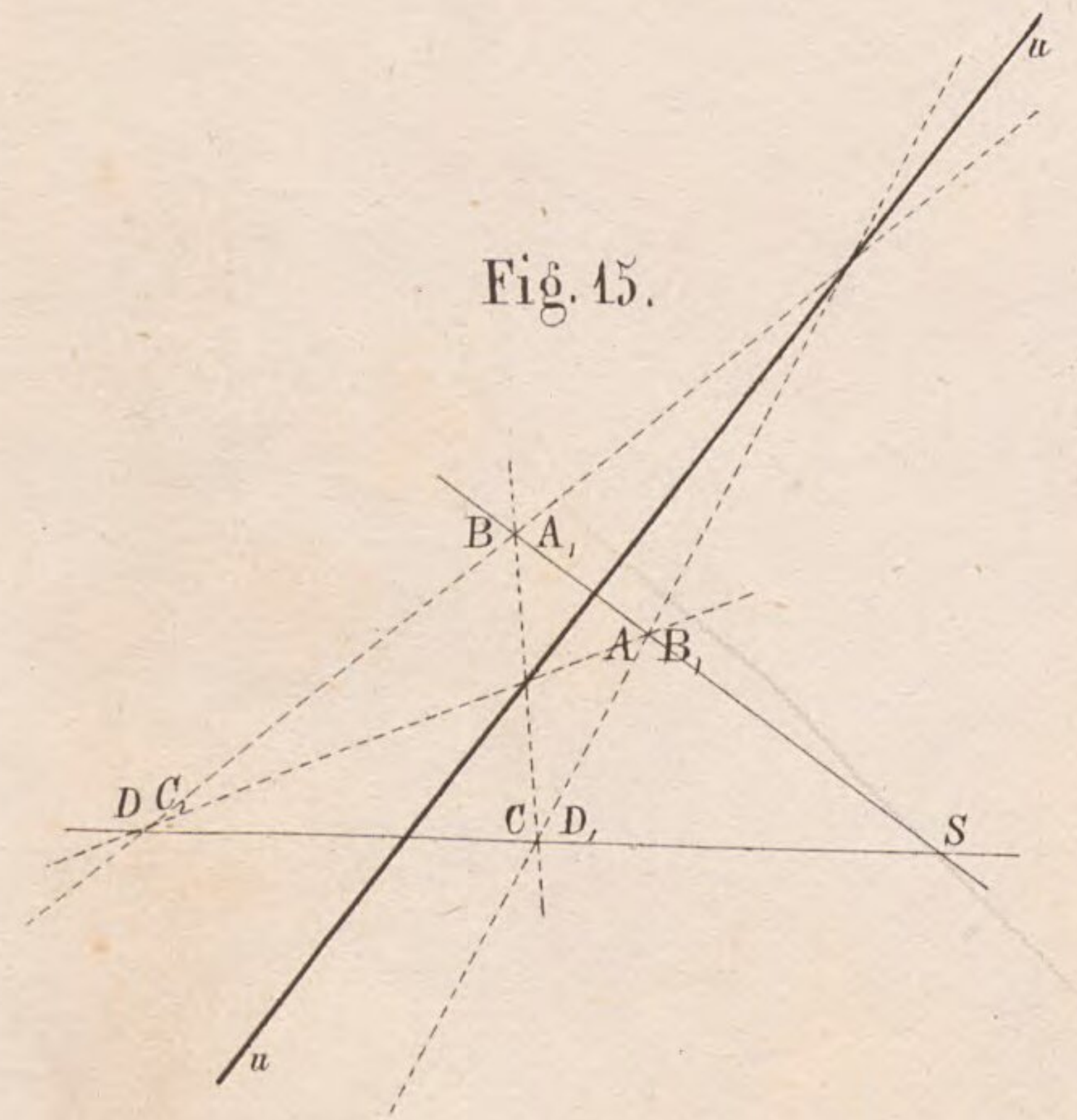


Fig. 15.

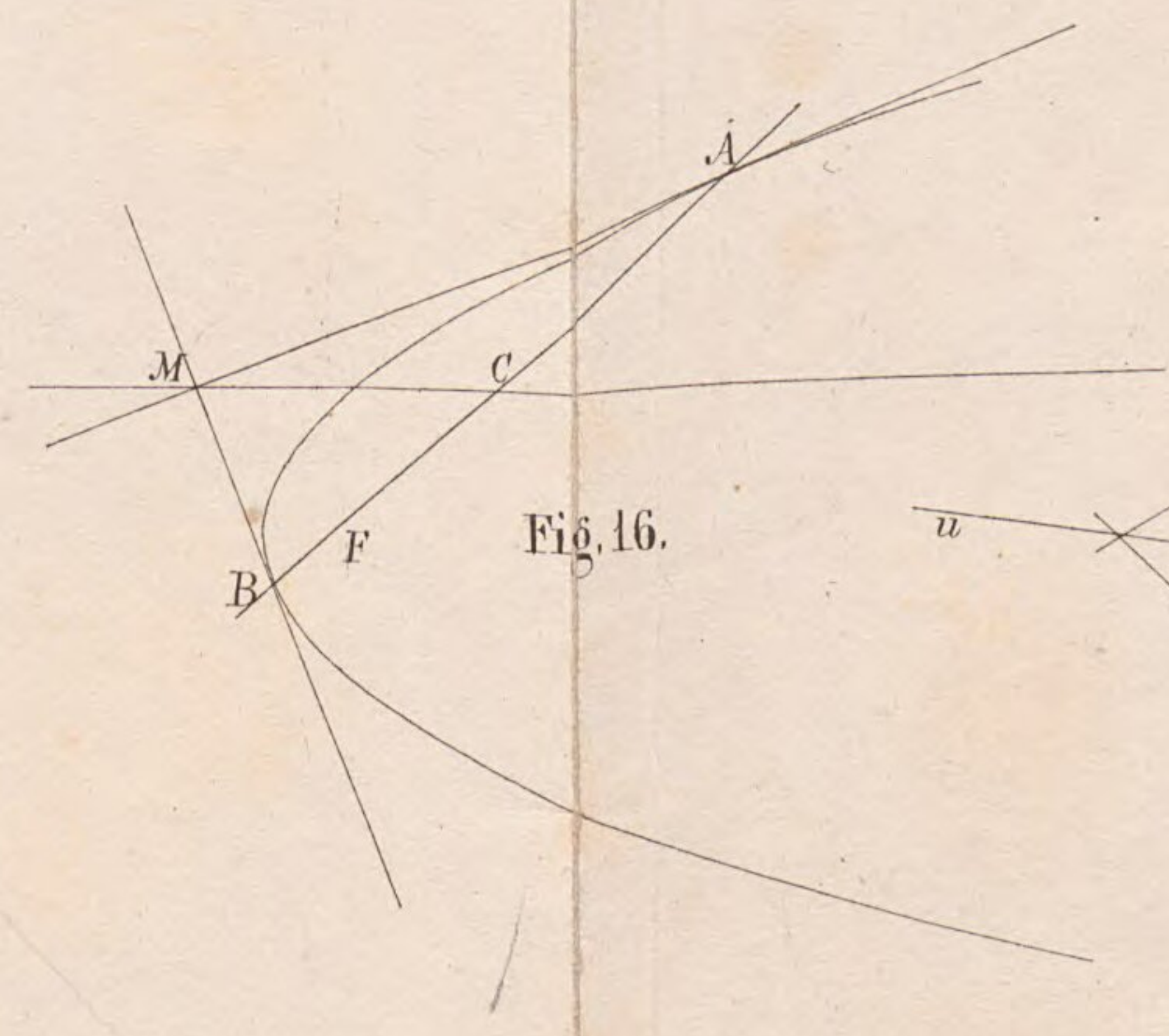


Fig. 16.

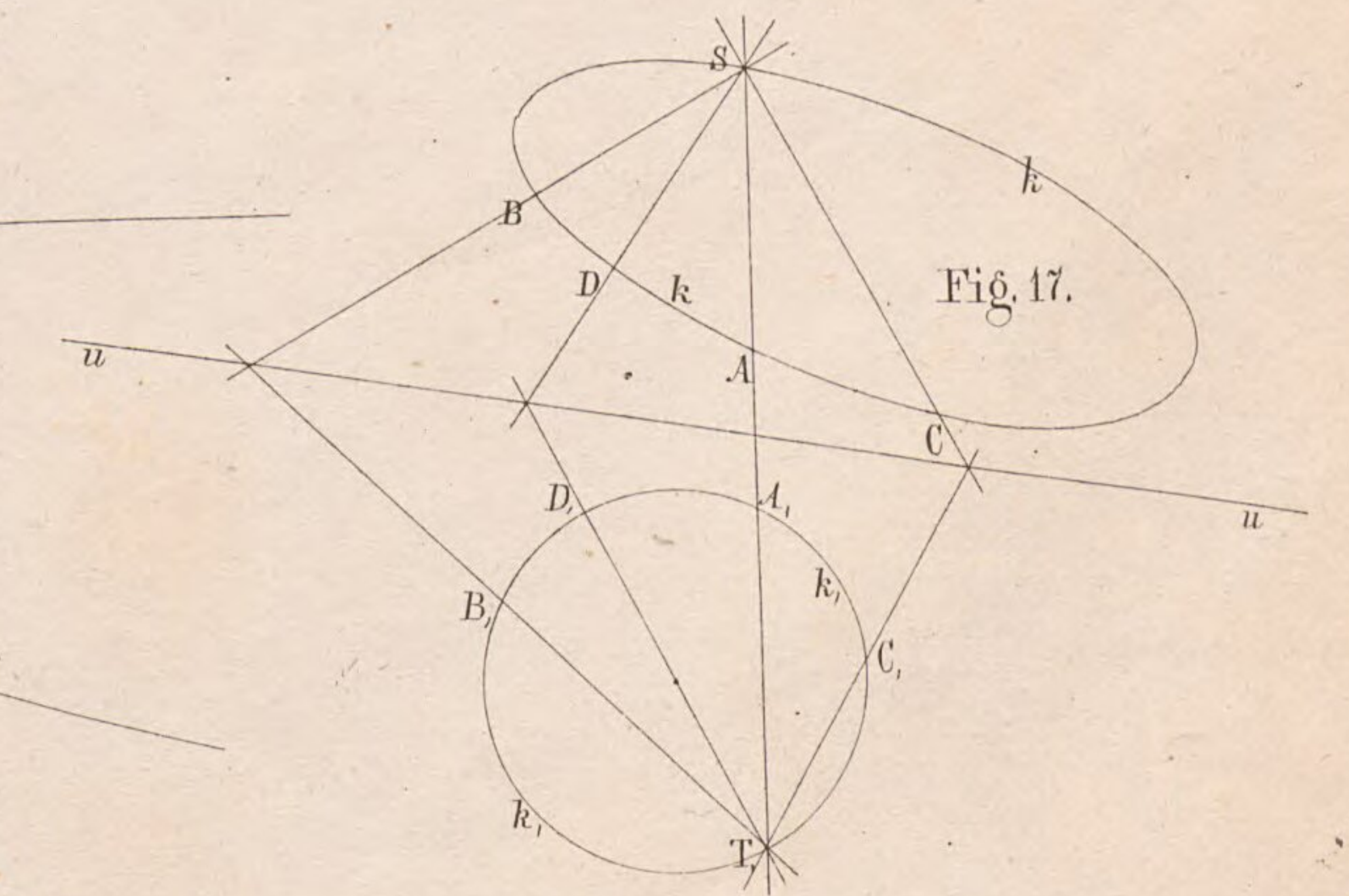


Fig. 17.

Reye, Theodor,

Die Geometrie der Lage Vorträge

Bd.: II

Hannover 1866

Math.p. 468 k-2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082670-6